# ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico
# Sessione ordinaria 2003
# SECONDA PROVA SCRITTA
# Tema di MATEMATICA
# (AMERICA – emisfero boreale)

***Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario:***
***PROBLEMA 1.***
In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{kx^3 + 9x}{x^2 + k},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a. Determinare a quali valori di k corrispondono curve continue su tutto l'asse reale.
b. Dimostrare che le curve assegnate hanno tre punti in comune.
c. Dimostrare che i tre punti sono allineati.
d. Tra le curve assegnate determinare la curva $\gamma$ avente per asintoto la retta di equazione $y=x$ e disegnarne l'andamento.
e. Verificare che i tre punti comuni a tutte le curve assegnate sono flessi per la curva $\gamma$.

***PROBLEMA 2.***
Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

a. tra le iperboli di equazione $xy=k$ indicare con j quella che passa per il punto A(1,3) e chiamare B il suo punto di ascissa –3;
b. determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^2+bx+c$ in modo che la parabola p rappresentata da essa sia tangente a j in A e passi per B;
c. determinare le coordinate del punto situato sull'arco AB della parabola p e avente la massima distanza dalla retta AB;
d. indicata con R la regione finita di piano delimitata dall'iperbole j, dalla parabola p, dall'asse x e dalla retta di equazione $x=3$, calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

***QUESTIONARIO.***

1. Le ampiezze degli angoli di un triangolo sono $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Sapendo che $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ e $\cos\beta = \frac{12}{13}$, calcolare il valore esatto di $\cos\gamma$, specificando se il triangolo è rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva di equazione $y = \cos x - 2 \operatorname{sen} x$. Determinare una traslazione degli assi che trasformi l'equazione nella forma $Y = k \operatorname{sen} X$.

3. Un trapezio è circoscrittibile ad un cerchio. Dimostrare che il triangolo avente per vertici il centro del cerchio e gli estremi di uno dei lati obliqui è un triangolo rettangolo.

4. x ed y sono due numeri naturali qualsiasi tali che $x - y = 1$. Stabilire se il numero $x^4 - y^4$ è divisibile per 2 o se non lo è.

5. Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$\ln \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

6. La funzione reale di variabile reale f(x) è derivabile in ogni x per cui risulti $1.0 \leq x \leq 1.1$; inoltre $f(1.1)=0$ e $1.0 \leq f'(x) \leq 1.1$ in ogni x dell'intervallo $1.0<x<1.1$. Dimostrare che risulta: $-0.11 \leq f(1.0) \leq -0.10$.

7. Sia f(x) una funzione continua e non negativa nell'intervallo chiuso e limitato $a \leq x \leq b$, rappresentata graficamente in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Indicata con R la regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette x=a e x=b, dimostrare che il volume V del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x è dato dalla formula seguente:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

---

· Durata della prova: 6 ore.
· Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.
· È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.