

ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
SPERIMENTAZIONI AUTONOME 1

SECONDA PROVA SCRITTA
Tema di MATEMATICA

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) , si consideri il luogo geometrico g dei punti P che vedono il segmento di estremi $A(0, 1)$ e $B(2, 1)$ sotto un angolo \widehat{APB} di ampiezza $\pi/4$ e se ne disegni il grafico.

Nel semipiano delle ordinate $y > 1$ si tracci la retta $y = k$, se ne indichino con C e D le eventuali intersezioni con g e con C' e D' le loro proiezioni ortogonali su AB . Si determinino i valori di k che rendono massime rispettivamente le seguenti grandezze:

- a) il lato obliquo del trapezio isoscele $ABDC$;
- b) la diagonale del rettangolo $CDD'C'$;
- c) il cilindro generato dalla rotazione di $CDD'C'$ attorno all'asse del segmento AB .

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) , si consideri la funzione:

$$y = \frac{x^3 + a}{(x + b)^2}$$

- si determinino a e b in modo che il grafico della curva g che ne risulta passi per il punto $P(2, 0)$ e abbia per asintoto la retta $x = -1$;
- si scriva l'equazione dell'asintoto obliquo t ;
- si determini l'angolo α che t forma con la tangente a g nel punto di intersezione tra g e t ;
- si tracci il grafico di:

$$y = \frac{|x^3 + a|}{(x + b)^2}$$

QUESTIONARIO

1. Il rapporto delle aree laterali di due coni aventi basi uguali è uguale al rapporto degli apotemi mentre il rapporto dei loro volumi è uguale al rapporto delle altezze.
2. Verificare, ricorrendo direttamente alla definizione, che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

3. Enunciare il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* e utilizzarlo per dimostrare che:

$$|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$$

4. Di una funzione $f(x)$ si sa che: $f(0) = (1/\log 2)^2$, $f'(0) = 0$ e che ha derivata seconda uguale a 2^x . Si può dire quanto vale $f(x)$?

5. Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = 2 \arcsen x - \arccos(1 - 2x^2)$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

6. Dimostrare che:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

7. Calcolare, con uno dei metodi numerici studiati, un valore approssimato della radice dell'equazione:

$$x - \log(2 - x) = 0$$

8. Tenuto conto che è:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

calcolare p con 3 cifre decimali esatte utilizzando una formula d'integrazione approssimata.

9. Tra 15 videogiochi di cui 5 difettosi se ne scelgono 3 a caso. Determinare la probabilità che

- a) nessuno dei tre sia difettoso;
- b) almeno uno dei tre non sia difettoso

10. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Dire come variano il suo volume e l'area della sua superficie.

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.

Durata massima della prova : 6 ore

E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.