

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

a.s. 2000/2001

- Tema di MATEMATICA

- Sessione suppletiva

CORSO DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Si consideri la funzione reale f_m di variabile reale x tale che:

$$f_m = \frac{x^2}{|x - 2m| + m},$$

dove m è un parametro reale non nullo.

- Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione.
- Indicata con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f_1(x)$ corrispondente ad $m=1$, studiarla e disegnarla in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2.
- Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_1 e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto A .

PROBLEMA 2.

Una piramide retta, di vertice V , ha per base il triangolo ABC , rettangolo in A , la cui area è $24 a^2$, dove a è

una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$ e che il piano della faccia VAB della piramide forma col piano della base ABC un angolo j tale che $\sin j = \frac{12}{13}$.

- Calcolare l'altezza della piramide.
- Controllato che essa è $\frac{24}{5} a$, calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB .
- Condotto, parallelamente alla base ABC , un piano α che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di α dalla base ABC , calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.
- Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale?

QUESTIONARIO.

1. Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, si prendano in esame le due seguenti proposizioni:

A: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia definita in un punto a è che sia continua in a .

B: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia continua in un punto a è che sia derivabile in a .

Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornire un'esauriente giustificazione della risposta:

a) A vera – B vera; b) A vera – B falsa; c) A falsa – B vera; d) A falsa – B falsa.

2. Si consideri il cubo di spigoli AA' , BB' , CC' , DD' , in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Indicato con E il punto medio dello spigolo AB , sia CF la retta perpendicolare a DE condotta per C . I piani $D'DE$ e $C'CF$ dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

3. Calcolare se esiste un numero naturale n per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 1048576.$$

4. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che: $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - x}{\cos 2x - 1}.$$

5. Dimostrare che la derivata, rispetto ad x , della funzione a^x , dove a è un numero reale positivo diverso da 1, è $a^x \ln a$.

6. Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.

7. Una primitiva della funzione $f(x)$ è $x^2 + 2x$. Se è possibile calcolare $\int_b^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$, determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia T un trapezoide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x)$, continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse x .

9. Calcolare la derivata della funzione $\sin 2x$ rispetto alla variabile x , ricorrendo alla definizione di derivata di una funzione.

10. Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, derivabile almeno due volte in un dato punto a , affinché la funzione $f(x)$ abbia in a un punto di flesso la condizione $f''(a) = 0$ è:

- a) necessaria e sufficiente;
- b) necessaria ma non sufficiente;
- c) sufficiente ma non necessaria.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.