

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Tema di MATEMATICA - a.s. 2000/2001

Testo valevole per i *CORSI SPERIMENTALI AUTONOMI* (1ª tipologia)

e per i seguenti progetti:

- INTERNAZIONALE SCIENTIFICO FRANCESE
- INTERNAZIONALE SCIENTIFICO SPAGNOLO
- PROTEO SCIENTIFICO
- PROTEO SCIENTIFICO TECNOLOGICO

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve C_m di equazione:

$$y = f_m(x),$$

dove:

$$f_m(x) = \frac{x + m}{|x + m| - m}$$

ed m è un parametro reale non nullo.

- a) Trovare l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità di f_m .
- b) Dimostrare che ogni curva C_m ha un centro di simmetria.
- c) Studiare e disegnare la curva C_2 corrispondente ad $m=2$.
- d) Determinare l'equazione della retta t tangente a C_2 nel punto di ascissa -1 e l'ascissa dell'ulteriore punto comune alla retta t e alla curva C_2 .
- e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_2 e dalla retta t .

PROBLEMA 2.

È dato il rettangolo ABCD i cui lati AB e AD sono lunghi rispettivamente $2a$ ed a , essendo a una lunghezza nota. Indicare con E il punto simmetrico di A rispetto alla retta BD e con F il punto in cui si secano le rette EB e DC.

- a) Dimostrare, con considerazioni di geometria sintetica, che i punti A, B, C, E, D appartengono ad una stessa circonferenza k .

- b) Stabilire che la lunghezza del segmento DF è $\frac{5}{4}a$.

- c) Calcolare l'area del pentagono ABCED.

- d) Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della circonferenza k e le coordinate dei punti A ed E.

- e) Calcolare, infine, le aree delle due regioni piane in cui la retta EC divide il cerchio delimitato da k .

QUESTIONARIO.

1. Considerate le funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$, dire se la seguente proposizione è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta: «Condizione necessaria e sufficiente affinché risulti $f'(x) = g'(x)$ è che sia $f(x) = g(x)$ » .

2. Il limite della funzione $\frac{x^2 - \operatorname{sen} x}{x^2 - \operatorname{cos} x}$, quando x tende a $+\infty$:

- A) è uguale a 0;
- B) è uguale a 1;
- C) è uguale a $+\infty$;
- D) non esiste.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $f(x)$ sia continua nel punto a è che risulti derivabile in a .

4. Una primitiva della funzione $f(x) = \operatorname{sen} 2x$. Se è possibile, calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{x}{3}\right) dx$. Altrimenti spiegare perché il calcolo non è possibile.

5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti rappresentati dalla seguente equazione:

$$x^2 + y^2 - 4xy = 0.$$

Tale luogo è costituito da:

- A) un punto;
- B) due punti;
- C) una retta;
- D) due rette;
- E) una figura diversa dalle precedenti.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

6. Nello spazio ordinario sono date tre rette a , b , c , delle quali si sa soltanto che c è perpendicolare sia alla retta a che alla retta b . Elencare tutte le possibili posizioni reciproche delle rette a , b .

7. Di un'affinità si sa soltanto che due rette corrispondenti, comunque scelte, sono parallele. Considerate le due seguenti proposizioni:

A: «è escluso che l'affinità sia una rotazione»,

B: «l'affinità può essere una similitudine»,

dire di ciascuna se è vera o falsa e fornire esaurienti spiegazioni delle risposte.

8. Considerata l'affinità di equazioni:

$$X = 2x + 3y, \quad Y = -3x + 2y,$$

determinare, se ve ne sono, le sue rette unite.

9. Da un sacchetto contenente i 90 numeri della "Tombola" si estraggono 4 numeri a caso. Considerata la

proposizione: «La probabilità che fra di essi ci siano i numeri "1" e "90" è $\frac{2}{90}$ », dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10. Due giocatori A e B giocano a TESTA-CROCE (le due facce della moneta hanno le stesse probabilità di uscita) con la seguente regola: «Uno dei due giocatori lancia e vince se viene TESTA altrimenti il gioco passa

all'altro giocatore; il quale lancia a sua volta e vince se viene TESTA altrimenti il gioco ritorna al primo; e così via». Calcolare quali probabilità ha il giocatore A di vincere sia nel caso in cui egli inizia a lanciare sia nel caso in cui a lanciare per primo sia B.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.