

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Tema di MATEMATICA - a.s. 2000/2001

Testo valevole per i CORSI SPERIMENTALI AUTONOMI (2ª tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve C_m di equazione:

$$y = f_m(x),$$

dove:

$$f_m(x) = \frac{x + m}{|x + m| - m}$$

ed m è un parametro reale non nullo.

- a) Trovare l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità di f_m .
- b) Dimostrare che ogni curva C_m ha un centro di simmetria.
- c) Studiare e disegnare la curva C_2 corrispondente ad $m=2$.
- d) Determinare l'equazione della retta t tangente a C_2 nel punto di ascissa -1 e l'ascissa dell'ulteriore punto comune alla retta t e alla curva C_2 .
- e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_2 e dalla retta t .

PROBLEMA 2.

È dato il rettangolo ABCD i cui lati AB e AD sono lunghi rispettivamente $2a$ ed a , essendo a una lunghezza nota. Indicare con E il punto simmetrico di A rispetto alla retta BD e con F il punto in cui si secano le rette EB e DC.

- a) Dimostrare, con considerazioni di geometria sintetica, che i punti A, B, C, E, D appartengono ad una stessa circonferenza k .

- b) Stabilire che la lunghezza del segmento DF è $\frac{5}{4}a$.

- c) Calcolare l'area del pentagono ABCED.

- d) Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della circonferenza k e le coordinate dei punti A ed E.

- e) Calcolare, infine, le aree delle due regioni piane in cui la retta EC divide il cerchio delimitato da k .

QUESTIONARIO.

1. Considerate le funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$, dire se la seguente proposizione è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta: «Condizione necessaria e sufficiente affinché risulti $f'(x) = g'(x)$ è che sia $f(x) = g(x)$ ».

$$\frac{x^2 - \sin x}{x^2 - \cos x}$$

2. Il limite della funzione $\frac{x^2 - \sin x}{x^2 - \cos x}$, quando x tende a $+\infty$:
- A) è uguale a 0;
 B) è uguale a 1;
 C) è uguale a $+\infty$;
 D) non esiste.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $f(x)$ sia continua nel punto a è che risulti derivabile in a .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

4. Una primitiva della funzione $f(x)$ è $\sin 2x$. Se è possibile, calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{x}{3}\right) dx$. Altrimenti spiegare perché il calcolo non è possibile.

5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti rappresentati dalla seguente equazione:

$$x^2 + y^2 - 4xy = 0.$$

Tale luogo è costituito da:

- A) un punto;
 B) due punti;
 C) una retta;
 D) due rette;
 E) una figura diversa dalle precedenti.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

6. Calcolare la derivata della funzione $\cos 2x$ ricorrendo alla definizione di derivata.

7. Il teorema di Lagrange afferma che: «Se $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a, b) allora esiste almeno un punto c dell'intervallo (a, b) tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{»}.$$

[1]

Fornire un'interpretazione geometrica del teorema e, sempre con ricorso all'interpretazione geometrica, far vedere che, se viene meno la condizione della derivabilità di $f(x)$ nell'intervallo (a, b) allora può non esistere alcun punto c dell'intervallo (a, b) per il quale sussista la [1].

8. Posto che $\ln x$ indichi il logaritmo di x in base e , risulta $\sqrt{\ln^2 x + 2 \ln x + 1} = \ln x + 1$ per tutti e soli gli x reali tali che:

$$\frac{1}{A) x^3 0; \quad B) x^3 1; \quad C) x^3 e; \quad D) x^3 e^e}.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. La base maggiore, la base minore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine: 10 cm, 8 cm, 30 cm. Dire se il trapezio è circoscrittibile ad un cerchio o se è inscrittibile in un cerchio e giustificare le risposte.

10. In un piano, riferito ad assi cartesiani ortogonali, sono assegnate una retta a di coefficiente angolare 2 ed una retta b di coefficiente angolare -2 . Calcolare il seno dell'angolo orientato (a,b) .

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.