

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Tema di MATEMATICA - a.s. 2000/2001

Testo valevole per i CORSI SPERIMENTALI (3ª tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve C_m di equazione:

$$y = f_m(x),$$

dove:

$$f_m(x) = \frac{x + m}{|x + m| - m}$$

ed m è un parametro reale non nullo.

- a) Trovare l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità di f_m .
- b) Dimostrare che ogni curva C_m ha un centro di simmetria.
- c) Studiare e disegnare la curva C_2 corrispondente ad $m=2$.
- d) Determinare l'equazione della retta t tangente a C_2 nel punto di ascissa -1 e l'ascissa dell'ulteriore punto comune alla retta t e alla curva C_2 .
- e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_2 e dalla retta t .

PROBLEMA 2.

È dato il rettangolo ABCD i cui lati AB e AD sono lunghi rispettivamente $2a$ ed a , essendo a una lunghezza nota. Indicare con E il punto simmetrico di A rispetto alla retta BD e con F il punto in cui si secano le rette EB e DC.

- a) Dimostrare, con considerazioni di geometria sintetica, che i punti A, B, C, E, D appartengono ad una stessa circonferenza k .

- b) Stabilire che la lunghezza del segmento DF è $\frac{5}{4}a$.

- c) Calcolare l'area del pentagono ABCED.

- d) Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della circonferenza k e le coordinate dei punti A ed E.

- e) Calcolare, infine, le aree delle due regioni piane in cui la retta EC divide il cerchio delimitato da k .

QUESTIONARIO.

1. Considerate le funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$, dire se la seguente proposizione è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta: «Condizione necessaria e sufficiente affinché risulti $f'(x) = g'(x)$ è che sia $f(x) = g(x)$ ».

2. Il limite della funzione $\frac{x^2 - \sin x}{x^2 - \cos x}$, quando x tende a $+\infty$:

- A) è uguale a 0;
- B) è uguale a 1;
- C) è uguale a $+\infty$;
- D) non esiste.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $f(x)$ sia continua nel punto a è che risulti derivabile in a .

4. Una primitiva della funzione $f(x)$ è $\sin 2x$. Se è possibile, calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{x}{3}\right) dx$. Altrimenti spiegare perché il calcolo non è possibile..

5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti rappresentati dalla seguente equazione:

$$x^2 + y^2 - 4xy = 0.$$

Tale luogo è costituito da:

- A) un punto;
- B) due punti;
- C) una retta;
- D) due rette;
- E) una figura diversa dalle precedenti.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

6. Di un'affinità si sa soltanto che due rette corrispondenti, comunque scelte, sono parallele. Considerate le due seguenti proposizioni:

A: «è escluso che l'affinità sia una rotazione»,

B: «l'affinità può essere una similitudine»,

dire di ciascuna se è vera o falsa e fornire esaurienti spiegazioni delle risposte.

7. Considerata l'affinità di equazioni:

$$X = 2x + 3y, \quad Y = -3x + 2y,$$

determinare, se ve ne sono, le sue rette unite.

8. Posto che $\ln x$ indichi il logaritmo di x in base e , risulta $\sqrt{\ln^2 x + 2 \ln x + 1} = \ln x + 1$ per tutti e soli gli x reali tali che:

$$A) x^3 0; \quad B) x^3 1; \quad C) x^3 e; \quad D) x^3 \frac{1}{e} .$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. Si consideri la successione di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 1 \\ a_{n-1} + 2n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Calcolare a_{70} e descrivere un algoritmo che generi i primi 70 numeri della successione e li comunichi sotto forma di matrice di 7 righe e 10 colonne.

10. Considerata l'equazione in x :

$$x^3 + x - 3 = 0 ,$$

spiegare perché ammette una soluzione reale ed una soltanto e scrivere un algoritmo che permetta di calcolarne un valore approssimato a meno di $1/100$.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.