SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO
ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2002
SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il triangolo ABC è rettangolo in A e i suoi cateti hanno misure note, una doppia dell'altra.
Condotta per A una retta r non secante il triangolo e detta B'C' la proiezione ortogonale dell'ipotenusa BC su r , si determini la posizione di r per cui l'area del trapezio B'BCC' è massima.
Si affronti il problema

- con i metodi della trigonometria (indicando, ad esempio, con x l'angolo che r forma con AC o AB);
- con i metodi della geometria analitica introducendo un conveniente sistema di riferimento cartesiano.

Si ritrovi, infine, il risultato a partire dall'osservazione che il trapezio è somma del triangolo dato e dei triangoli rettangoli, di ipotenuse costanti, B'BA e ACC'. Quand'è che ciascuno di questi ha area massima?

PROBLEMA 2

Uno spicchio sferico di ampiezza 20° ha il volume, approssimato a meno di 10^{-2}, uguale a $169\ ,65\ cm^3$.

1. Si determini il raggio della sfera cui lo spicchio appartiene;
2. Supposto che la sfera sia di ferro (peso specifico = 7,8) e pesi 21,65 kg si stabilisca se essa è piena o contiene al suo interno qualche cavità.
3. Si calcoli l'altezza del cono di volume minimo circoscritto alla sfera.

QUESTIONARIO

1. Cosa si intende per "funzione periodica"? Quale è il periodo di $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$? Quale quello di cospx?

2. Se $f(x) = 2^x$, mostrare che

   a) $f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2} f(x)$

   b) $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4)$

3. Dopo aver spiegato il significato e il valore del numero e di Nepero, calcolare

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$$

4. Determinare il valore del parametro t che soddisfa l'equazione:

$$\int_0^t \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_0^1 (3x^2 + 2x + 1)dx$$

5. Trovare l'equazione di una curva sapendo che il suo coefficiente angolare nel punto (x, y) è $x\sqrt{1+x^2}$ e passa per il punto (0, -2)
6. Due angoli a e b misurano rispettivamente p2 radianti e 539 gradi. Quale dei due è il maggiore? Quale è più grande, $\operatorname{sen}\alpha$ o $\operatorname{sen}\beta$?
7. Provare che esiste un numero reale a con $1 < \alpha < 2$ in cui si annulla la funzione:

$$f(x) = tgx + \log x - x$$

ove logx denota il logaritmo naturale di x.

8. Si stima che la popolazione mondiale aumenti dell'1,7% ogni anno. Indicata con P la popolazione mondiale attuale e con Q la popolazione stimata tra un anno, il legame tra P e Q è espresso da:

a) Q = 1,0017P
b) Q = 1,017P
c) Q = 1,17P
d) Q = 1,7P
e) Nessuna delle risposte precedenti è esatte

Dare una esauriente spiegazione della risposta.

Durata massima della prova : 6 ore
E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.