ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Tema di MATEMATICA - a.s. 2001/2002
CORSO DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione y = f(x), dove è:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}.$$

a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano y>0 e per quali nel semipiano y<0.
b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1 (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).
c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.
d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.
e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione f(x) assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \le x \le 0$.

PROBLEMA 2.

Si considerino le lunghezze seguenti:
[1] $a + 2x$, $a - x$, $2a - x$,
dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.
a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.
b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.

c) Verificato che per $x = \frac{a}{4}$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.
d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c), in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

QUESTIONARIO.

1. Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

2. Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A" e volumi V' e V". Si sa che $\frac{A'}{A''} = 2$. Calcolare il valore del rapporto $\frac{V'}{V''}$.

3. Considerati i numeri reali a, b, c, d - comunque scelti - se $a > b$ e $c > d$ allora:
A) $a + d > b + c$;
B) $a - d > b - c$;

C) $a\,d > b\,c$;

D) $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

4. Si consideri la seguente proposizione: «La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica». Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

5. Determinare, se esistono, i numeri a, b in modo che la seguente relazione:

sia un'identità. $$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}$$

6. Si consideri la funzione:

$$f(x) = (2x-1)^7(4-2x)^5.$$

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \le x \le 2$.

7. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione f(x) tale che:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt, \quad \text{con } x > 0.$$

8. La funzione reale di variabile reale f(x) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1,3] e derivabile nell'intervallo aperto (1,3). Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 \le f'(x) \le 2$ per ogni x dell'intervallo (1,3). Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \le f(3) \le 5$.

9. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}.$$

Tale luogo è costituito da:
A) un punto;
B) due punti;
C) infiniti punti;
D) nessun punto.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10. La funzione reale di variabile reale f(x), continua per ogni x, è tale che:

dove a, b sono numeri reali. $$\int_0^2 f(x)\,dx = a, \qquad \int_0^6 f(x)\,dx = b,$$

Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4.$$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla consegna della dettatura del tema.