ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
PIANO NAZIONALE DI INFORMATICA
Sessione Ordinaria 2002

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali ad un numero reale a non nullo.
Riferito il piano ad un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x,y):

1) si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di a;
2) si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti P(x,y) che soddisfano al problema;
3) si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;
4) si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ' e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;
5) si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

PROBLEMA 2

I raggi OA = OB = 1 metro tagliano il cerchio di centro O in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.
Si chiede di determinare:

1) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) la lunghezza dell'arco AB al quale corrisponde il cono C di volume massimo, il valore V di tale volume massimo e il valore V' assunto in questo caso dal volume del secondo cono C';
2) la capacità complessiva, espressa in litri, di C e di C';
3) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C, specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

QUESTIONARIO

1. Se a e b sono numeri positivi assegnati quale è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n?

2. Il seguente è uno dei celebri problemi del Cavaliere di Méré (1610 - 1685), amico di Blaise Pascal: "giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?"

3. Assumendo che i risultati - X, 1, 2 - delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

4. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}$$

5. Cosa si intende per "funzione periodica"? Quale è il periodo di $f(x) = -sen\,\frac{\pi x}{3}$? Quale quello di sen2x?

6. Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ ($p,q \in \Re$), se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

7. Data la funzione $f(x) = e^x - senx - 3x$
calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla.

8. Verificare che la funzione $3x + \log x$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare g^1 (3).

9. Trovare f(4) sapendo che $\int_0^x f(t)dt = x \cos \pi x$

10. Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra omotetia e similitudine nel piano.

Durata massima della prova : 6 ore
E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.