ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
PIANO NAZIONALE DI INFORMATICA – SCIENTIFICO BROCCA
Sessione 2002
seconda prova scritta
Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x,y) è assegnata la funzione:

$$y = \frac{a + b \log x}{x}$$

ove logx denota il logaritmo naturale di x e *a* e *b* sono numeri reali non nulli.

a) Si trovino i valori di *a* e *b* per i quali il grafico G della funzione passa per i punti $\left(e^{-1}, 0\right)$ e $\left(e^{2}, 3e^{-2}\right)$
b) si studi e si disegni G;
c) si determini l'equazione della curva G' simmetrica di G rispetto alla retta y=y(1) ;
d) si determini, con uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione dell'area delimitata, per $1 \le x \le 2$, da G e da G';
e) si disegnino, per i valori di *a* e *b* trovati, i grafici di:

$$y = \frac{a + b \log |x|}{|x|} \qquad y = \left| \frac{a + b \log x}{x} \right|$$

PROBLEMA 2

E' data la sfera S di centro O e raggio r. Determinare:
a) il cono C di volume minimo circoscritto a S;
b) il cono C' di volume massimo inscritto in S;
c) un'approssimazione in litri della capacità complessiva di C e C', posto *r =1 metro*;
d) la misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono C;
e) la misura approssimata, in gradi sessagesimali, dell'angolo di semiapertura del cono C applicando uno dei metodi numerici studiati.

QUESTIONARIO

1. Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono quattro senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante, come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la quaterna (7, 47, 67, 87).

2. Calcolare la probabilità che in dieci lanci di una moneta non truccata dal quinto lancio in poi esca sempre testa.

3. Calcolare la derivata rispetto a x della funzione

$$\int_x^b f(t)dt$$

ove *f(x)* è una funzione continua.

4. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x sent^3 dt}{x^4}$$

5. Utilizzando il teorema di Rolle provare che tra due radici reali di $e^x senx = 1$ c'è almeno una radice reale di $e^x \cos x = -1$.

6. Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo di estremi 1 e x, provare che:

$$1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1$$

e dare del risultato un'interpretazione grafica.

7. Verificare che la funzione:

$$y = \frac{1 - e^{1-x}}{1 + e^{1-x}}$$

è invertibile e detta *g* la funzione inversa, calcolare $g'(0)$.

8. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si valuti l'integrale definito

$$\int_1^3 \frac{\log x}{x} dx$$

con un errore inferiore a 10^{-4}.

9. Verificato che l'equazione $\cos x - \log x = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 1 e 2 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

10. Chiarire, con esempi appropriati, la differenza in matematica tra "*concetto primitivo*" e *"assioma"*.

Durata massima della prova : 6 ore
E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.