

# ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

a.s. 2002/2003

CORSO SPERIMENTALE

SESSIONE SUPPLETIVA

Autonomi gruppo 3

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

## PROBLEMA 1.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole di equazione:

$$y = (a - 1)x^2 - 2ax + a^2,$$

dove  $a$  è un parametro reale diverso da 1.

- Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse  $x$  e quali no.
- Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa  $a$ .
- Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.
- Scrivere l'equazione del luogo geometrico  $L$  dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.

- Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva  $L$  e dalla retta di equazione  $y = \frac{3}{2}$ .

## PROBLEMA 2.

In un trapezio rettangolo ABCD, circoscritto ad un cerchio, AB è la base maggiore, CD la minore e BC il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

- Calcolare le misure dei lati del trapezio.
- Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.
- Determinare l'equazione della circonferenza inscritta nel trapezio.
- Trovare le coordinate dei punti in cui questa circonferenza tocca i lati del trapezio.
- Calcolare le tangenti degli angoli interni del quadrilatero avente per vertici i suddetti punti di contatto.

## QUESTIONARIO.

1) Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.

[Nota – La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.]

2) Nello spazio ordinario sono dati due piani  $\alpha$ ,  $\beta$  ed una retta  $r$ . Si sa che  $r$  è parallela ad  $\alpha$  e perpendicolare a  $\beta$ . Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di  $\alpha$  e  $\beta$ ? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3) Il dominio della funzione  $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$  è l'insieme degli  $x$  reali tali che:

- A)  $x \leq 0$  e/o  $x > 2$ ; B)  $x \leq 0$  e/o  $x \geq 2$ ; C)  $x = 0$  e/o  $x > 2$ ; D)  $x = 0$  e/o  $x \geq 2$ .

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4) Si consideri un polinomio di grado  $n \geq 2$  nella variabile reale  $x$  con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale  $a$  è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per  $x = a$ .

5) Stabilire se esistono i limiti della funzione  $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$  per:

- a)  $x \rightarrow +\infty$ ; b)  $x \rightarrow -\infty$ ; c)  $x \rightarrow 0$ ,

e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

6) Dimostrare che la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione:

$$f(x) = \arcsen x$$

è la funzione:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette a, b di equazioni

rispettivamente:  $y = x + \frac{1}{7}$ ,  $y = \frac{1}{7}x - 1$ . Calcolare il coseno dell'angolo orientato (a, b).

8) Servendosi della calcolatrice (o eventualmente di tavole logaritmiche) calcolare un valore approssimato della soluzione della seguente equazione in x:

$$10^{(e^x)} = e^{(10^x)},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

9) La funzione reale di variabile reale  $f(x)$  è derivabile in ogni x per cui risulti  $-1 \leq x \leq 0$ ; inoltre  $f(0)=0$  e  $-1 \leq f'(x) \leq 0$  in ogni x dell'intervallo  $-1 < x < 0$ . Stabilire in modo esauriente se è vero o falso che risulta  $0 \leq f(-1) \leq 1$ .

10) Per  $x \rightarrow 0$  la funzione  $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ :

- A) ha limite 0;
- B) ha limite  $\infty$ ;
- C) è una forma indeterminata del tipo  $0 \cdot \infty$  che non si può eliminare;
- D) non ammette limite.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

Torna