

**ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**  
**PIANO NAZIONALE DI INFORMATICA**  
Sessione Ordinaria 2004  
SECONDA PROVA SCRITTA  
Tema di MATEMATICA

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.*

**PROBLEMA 1**

Sia  $\gamma$  la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove  $k$  e  $\lambda$  sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni  $\gamma$ ;
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse  $x$  e i vertici del lato opposto su  $\gamma$ ;

3. sapendo che  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  e assumendo  $\lambda = \frac{1}{2}$ , si trovi il valore da attribuire a  $k$  affinché l'area compresa tra  $\gamma$  e l'asse  $x$  sia 1;
4. per i valori di  $k$  e  $\lambda$  sopra attribuiti,  $\gamma$  è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità o normale di Gauss* (da *Karl Friedrich Gauss, 1777-1855*). Una *media*  $\mu \neq 0$  e uno *scarto quadratico medio*  $\sigma \neq 1$  come modificano l'equazione e il grafico?

**PROBLEMA 2**

Sia  $f$  la funzione così definita:

con  $a$  e  $b$  numeri reali diversi da zero.

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{2b} x + x$$

1. Si dimostri che, comunque scelti  $a$  e  $b$ , esiste sempre un valore di  $x$  tale che  $f(x) = \frac{a+b}{2}$ .
2. Si consideri la funzione  $g$  ottenuta dalla  $f$  ponendo  $a = 2b = 2$ . Si studi  $g$  e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per  $x > 0$  il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

**QUESTIONARIO**

1. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
2. Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
3. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?
4. Dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$  quante sono le applicazioni (le funzioni) di  $A$  in  $B$ ?
5. Dare un esempio di funzione  $g$ , non costante, tale che:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4$$

6. Dare un esempio di funzione  $f(x)$  con un massimo relativo in  $(1, 3)$  e un minimo relativo in  $(-1, 2)$ .
7. Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.
8. Si trovino due numeri reali  $a$  e  $b$ ,  $a \neq b$ , che hanno somma e prodotto uguali.
9. Si dimostri che l'equazione  $e^x + 3x = 0$  ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.
10. Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$x \rightarrow x\sqrt{3} - y$$

Di quale trasformazione si tratta?

$$y \rightarrow x + y\sqrt{3}$$

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.