

SESSIONE SUPPLETIVA
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a.s. 2003/2004
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

$$[1] \quad y = \frac{2x(6-x)}{2+x}.$$

- a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.
- b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.
- c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.
- d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.
- e) Spiegare perché la funzione [1] non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

PROBLEMA 2.

Una piramide ha per base il quadrato ABCD di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza VH della piramide è lunga 7 cm e il suo piede H è il punto medio del lato AB. Condurre per la retta AB il piano α che formi con il piano

della base della piramide un angolo φ tale che $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ e indicare con EF la corda che il piano α intercetta sulla faccia VCD della piramide.

- a) Spiegare perché il quadrilatero convesso ABEF è inscritto in una circonferenza γ .
- b) Tale quadrilatero è anche circoscritto ad una circonferenza?
- c) Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α .
- d) Dopo aver riferito il piano α ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), determinare l'equazione della circonferenza γ .

QUESTIONARIO.

1. La funzione $f(x) = \frac{3x - 2\sin x}{2x - 3\sin x}$ è, per $x \rightarrow +\infty$, una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione, per $x \rightarrow +\infty$:

A) non esiste; B) è $\frac{3}{2}$; C) è $\frac{2}{3}$; D) è un valore diverso da $\frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

2. Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^n k$ non supera 10000.

3. Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se $F'(a) > 0$ allora $F(x)$ è crescente in a, mentre se $F'(a) < 0$ allora $F(x)$ è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a) = 0$ ed $F''(a) < 0$.

4. Risolvere la seguente disequazione in x:

$$(\ln x)^2 \geq \ln(x^2).$$

5. Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma $x+y+z$ risulta:

[A] sempre maggiore di h;

[B] sempre minore di h;

[C] sempre uguale ad h;

[D] a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

6. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$$x y + p x + q y + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

7. Il quadrilatero Q'' avente per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso Q' è un quadrato. Dire quali sono le caratteristiche del quadrilatero Q' e darne esauriente dimostrazione.

8. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore

dell'integrale $\int_0^3 f(x) dx$. È allora possibile calcolare:

$$[A] \int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx; \quad [B] \int_0^3 f(3x) dx; \quad [C] \int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right) dx; \quad [D] \int_0^1 f(3x) dx.$$

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

9. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln \left(2x - \sqrt{4x-1} \right)$.

10. Di triangoli non congruenti, di cui un lato è lungo 10 cm e i due angoli interni adiacenti ad esso, α e

β , sono tali che $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ e $\sin \beta = \frac{24}{25}$, ne esistono:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.