

SESSIONE SUPPLETIVA
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a.s. 2003/2004
CORSO SPERIMENTALE P.N.I.
Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

$$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}.$$

- [1]
- a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.
- b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.
- c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.
- d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.
- e) Spiegare perché la funzione [1] non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

PROBLEMA 2.

Nel Liceo Scientifico "Torricelli" vi sono 4 classi quinte, i cui alunni sono distribuiti per sezione e per sesso in base alla seguente tabella:

sezione sesso	A	B	C	D
M	12	10	13	8
F	16	18	15	20

- a) Rappresentare graficamente la situazione per mezzo di un istogramma.
- b) Calcolare le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso.
- c) Calcolare la probabilità che, scelta a caso una coppia di studenti della 5aA, questa sia formata da alunni di sesso:
- 1) maschile, 2) femminile, 3) differente.
- Quanto vale la somma delle tre probabilità trovate?.
- d) Calcolare la probabilità che, scelti a caso una classe e, in essa, una coppia di studenti, questa sia formata da alunni di sesso differente.
- e) Scelto a caso un alunno di quinta del Liceo in questione e constatato che si tratta di uno studente di sesso maschile, calcolare la probabilità che esso provenga dalla 5aD.

QUESTIONARIO

1. La funzione $f(x) = \frac{3x - 2\sin x}{2x - 3\sin x}$ è, per $x \rightarrow +\infty$, una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione, per $x \rightarrow +\infty$:

- A) non esiste; B) è $\frac{3}{2}$; C) è $\frac{2}{3}$; D) è un valore diverso da $\frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

2. Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^n k$ non supera 10000.

3. Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a . Si sa che se $F'(a) > 0$ allora $F(x)$ è crescente in a , mentre se $F'(a) < 0$ allora $F(x)$ è decrescente in a . Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a) = 0$ ed $F''(a) < 0$.

4. Risolvere la seguente disequazione in x :

$$(\ln x)^2 \geq \ln(x^2).$$

5. Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma $x+y+z$ risulta:

- [A] sempre maggiore di h ;
[B] sempre minore di h ;
[C] sempre uguale ad h ;
[D] a volte maggiore di h , a volte minore, a volte uguale.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

6. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) , si consideri l'equazione:

$$x^2 + p x + q y + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

7. Descrivere tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sé.

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) , sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = a x + b y \\ Y = \frac{1}{2} b x - 2 \end{cases}$$

Tra di esse determinare quella che trasforma il punto $(1, 0)$ nel punto $(1, -1)$ e stabilire se ammette rette unite.

9. Due giocatori, A e B , giocano a "Testa o Croce" con una moneta le cui facce hanno la stessa probabilità di uscire. Ciascuno di loro punta la somma S . Chi vince porta via l'intera posta. Il gioco si svolge con la seguente regola: «Il giocatore A lancia la moneta: se esce "Testa" vince, altrimenti il gioco passa a B . Questi, a sua volta, lancia la moneta e vince se viene "Croce", in caso contrario il gioco ritorna ad A , che

ripete il lancio e vince se viene “Testa”. In caso contrario il gioco ripassa a B, che vince se viene “Croce”. Se B non vince il gioco ha termine e ciascuno dei due giocatori riprende la somma che aveva puntato». Il gioco è equo?

1

10. Dopo avere spiegato perché la funzione $f(x) = \frac{1}{x - \cos x}$ è positiva nell'intervallo $[1, 2]$, esplicitare un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato dell'area situata sotto il grafico della funzione relativamente all'intervallo considerato.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.