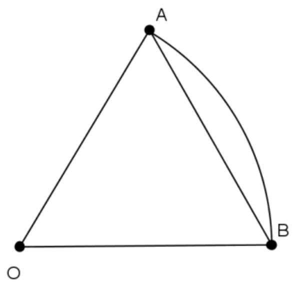
PROBLEMA 1

E' assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).



1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da $S(x) = \frac{1}{2}r^2(x - senx)$ con $x \in [0,\ 2\pi]$
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).
3. Si fissi l'area del settore AOB pari a $100m^2$. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia $r = 2\ e\ x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = logx$ (*logaritmo naturale*)

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è δ=45°? E per quale valore di a è δ=135°?
3. Sia **D** la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di **D**.
4. Si calcoli il volume del solido generato da **D** nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$

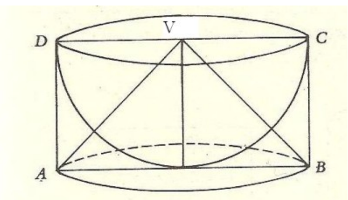
QUESTIONARIO

1. Siano: $0 < a < b$ e $x \in [-b,\ b]$. Si provi che: $\int_{-b}^{b} |x-a|\, dx = a^2 + b^2$
2. Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $e\ B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili *funzioni* (o *applicazioni*) di A in B, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?
3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75*mm*) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)
4. *"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni"*. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1};\quad \frac{0}{0};\quad \frac{1}{0};\quad 0^0$$

   A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $senx = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?
7. Si dimostri l'identit*à* $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ co*n* n *e* k naturali $e\ n > k$
8. Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?
9. Nei *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, Galileo Galilei



   descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.
   Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

10. "*Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli* $P\hat{A}B$ *e* $Q\hat{B}A$ *hanno somma minore di 180°, allora le semirette AP e BQ, prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q, si devono intersecare*". Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.