

PROBLEMA 1

Nel sistema di riferimento Oxy , sia Γ il grafico della funzione definita su \mathbf{R} da

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$$

1. Si verifichi che Γ taglia l'asse delle ordinate nel punto A e l'asse delle ascisse nei punti B e C . Si calcolino le coordinate di A , B e C .
2. Si studi la funzione f e si disegni Γ
3. Si consideri la funzione g definita su \mathbf{R} da $g(x) = (1 + 2x + x^2)e^{-x}$. Si mostri che la funzione g è una primitiva della funzione f su \mathbf{R} .
4. Si calcoli l'area della parte di piano compresa tra Γ e l'asse x sull'intervallo $[-1, 2]$. Si calcoli altresì

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_1^{\alpha} (1 - x^2)e^{-x} dx$$

e si interpreti geometricamente il risultato

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani Oxy , sono dati i punti: $A(2; 1)$, $B(-2; 1)$, $C(2; 3)$, $D(2; 5)$, $E(6; 5)$

- a) Si verifichi che il quadrilatero convesso $ABDE$ è un parallelogramma del quale C è il punto d'incontro delle diagonali. Si calcoli l'area del quadrilatero.
- b) Si consideri il fascio di curve di equazione

$$y = \frac{x^2 + 2x + a}{2x - 4}$$

- dove a è un parametro reale. Si verifichi che, qualunque sia a , la curva corrispondente ammette il punto C come centro di simmetria e le rette AD e BE come asintoti.
- c) Si determini la curva λ del fascio passante per il punto $P(0; 1)$ e si verifichi che le rette AB e DE sono tangenti a λ . Si tracci il grafico di λ .
 - d) Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata da λ , dalla retta BE , dalla retta di equazione $x = -2$ e dall'asse y .

QUESTIONARIO

1. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ radianti.
2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4; 0).
3. Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tga}}{x - a}$$

4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n .
5. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei suoi personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme N dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: «...se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Quale la risposta (motivata) all'interrogativo posto?
6. Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?
7. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? E perchè è così spesso citato?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f , un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f'' .

Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta

