Sessione suppletiva 1998

ESAMI DI MATURITA' SCIENTIFICA SPERIMENTALE
(Corsi che hanno seguito il Progetto "Brocca" ad Indirizzo Scientifico- Tecnologico)

Argomenti di matematica

1. Vincenzo Viviani (1622-1703) nell'opera **De Maximis et Minimis,** data alle stampe nel 1659, avvertì la necessità di inserire un problema a cui aveva dato soluzione e che era stato oggetto di studio anche da parte di altri più noti e valenti matematici del tempo.

Il problema è il seguente :
" Dato un triangolo ABC, i cui angoli misurano ciascuno meno di 120°, trovare un punto X tale che la somma XA+XB+XC sia minima".
La soluzione di Viviani, trovata, egli dice, non senza iterati sforzi, è questa : X è il punto, interno al triangolo, che "vede" o proietta i lati AB, BC, CA, sotto angoli di 120°.
Il problema conserva inalterata la sua importanza in quanto se i vertici A, B e C rappresentano, ad esempio, tre villaggi o città che si vogliono collegare tra loro, ragioni di convenienza potrebbero consigliare di realizzare la rete stradale minima.

Il candidato localizzi il punto X nell'ipotesi semplificatrice che la retta passante per C e per il punto medio M del segmento AB sia perpendicolare a tale segmento :
a) dimostri che il punto X che realizza il minimo appartiene al segmento CM ;
b) introdotto un sistema di coordinate tale che C sia l'origine e CM coincida con l'asse x positivo e indicate con (a,b) e (x,0) rispettivamente le coordinate di A e di X, dimostri che s(x)=XA+XB+XC è data dalla formula :

$$s(x) = x + 2\sqrt{(a-x)^2 + b^2}$$

c) dimostri che se $a \le b/\sqrt{3}$, s(x) assume il minimo in $x = 0$, mentre se $a > b/\sqrt{3}$, s(x) assume il minimo in $x = a - b/\sqrt{3}$;

d) interpreti geometricamente il risultato confrontandolo con l'enunciato e la soluzione, più generale, di Viviani.

A completamento del problema il candidato illustri sinteticamente il significato e l'importanza del teorema di **J.Bernoulli o *legge dei grandi numeri.***

2. Nel piano riferito ad assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la circonferenza con centro nel punto $(0, \frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{2}$; la retta variabile OA passante per l'origine O interseca la retta $y = 1$ nel punto A e la circonferenza nel punto B. Determinare il luogo dei punti P intersezioni delle rette passanti per A e per B e parallele agli assi y e x, rispettivamente.

· Determinata l'equazione del luogo se ne tracci il grafico e, parimenti, si tracci il grafico di $y = -\frac{1}{1+x^2}$;

· si calcolino le aree :

a) della superficie compresa fra le due curve
b) della superficie compresa fra le due curve per $-1 \le x \le 1$;
· si usi un metodo di integrazione numerica per approssimare l'area di cui al punto b) fornendo altresì una stima dell'errore commesso ;

· *"p è la somma, espressa in radianti, degli angoli interni di un triangolo"* : il candidato discuta la validità o meno di tale teorema in un contesto di **geometria non euclidea ;**

· Illustri il candidato il problema classico della ***quadratura del cerchio***, la cui "impossibilità" Dante Alighieri così evoca poeticamente :

"*Qual è 'l geomètra che tutto s'affige*
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,

(Paradiso, c.XXXIII, vv.133-135)

La prova richiede lo svolgimento di due soli problemi, scelti tra quelli proposti, dei quali uno di matematica e uno di ....

Durata massima della prova : 5 ore
E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.