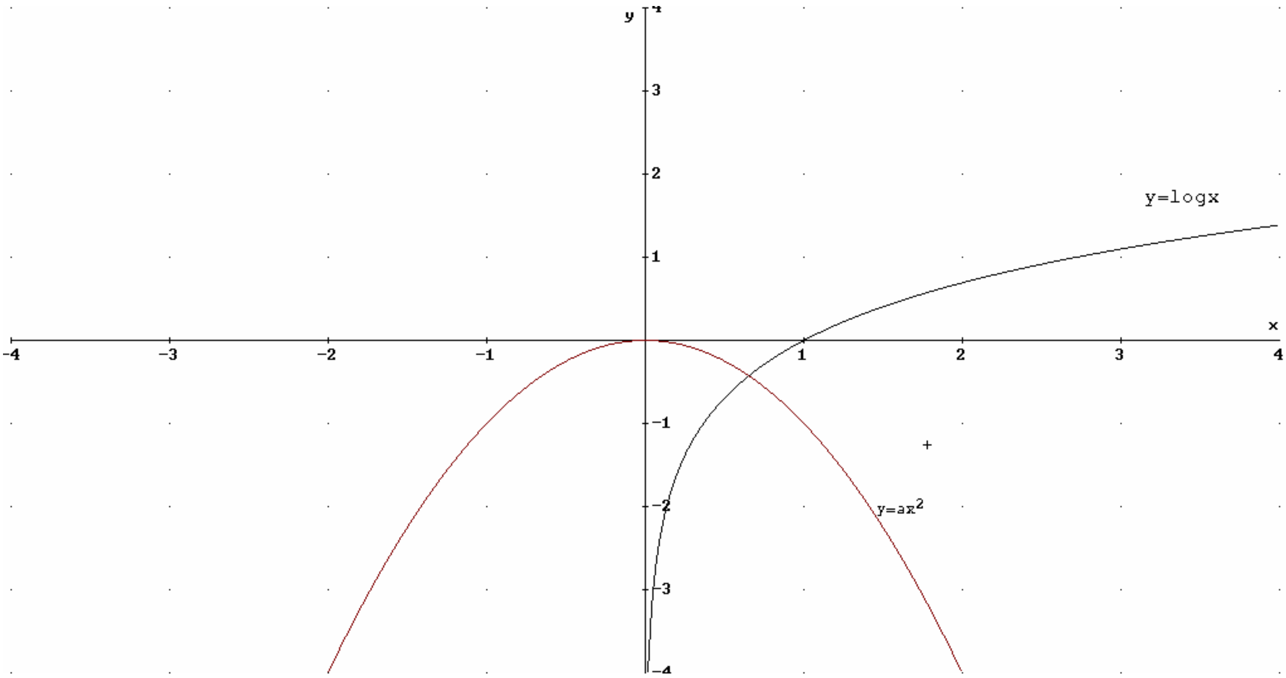
Risoluzione Problema 2 (PNI)

1.

Per $a = 0$ l'equazione diventa logx = 0 che ammette la soluzione x = 1.
Per $a < 0$ il grafico della funzione $y = ax^2$ è una parabola per l'origine con la concavità rivolta verso il basso. L'equazione $\log x = ax^2$ è equivalente al sistema $\begin{cases} y = \log x \\ y = ax^2 \end{cases}$ che ammette una sola soluzione $x_0 \in]0,1]$,come appare evidente dal seguente grafico:



Sia ora $a > 0$.

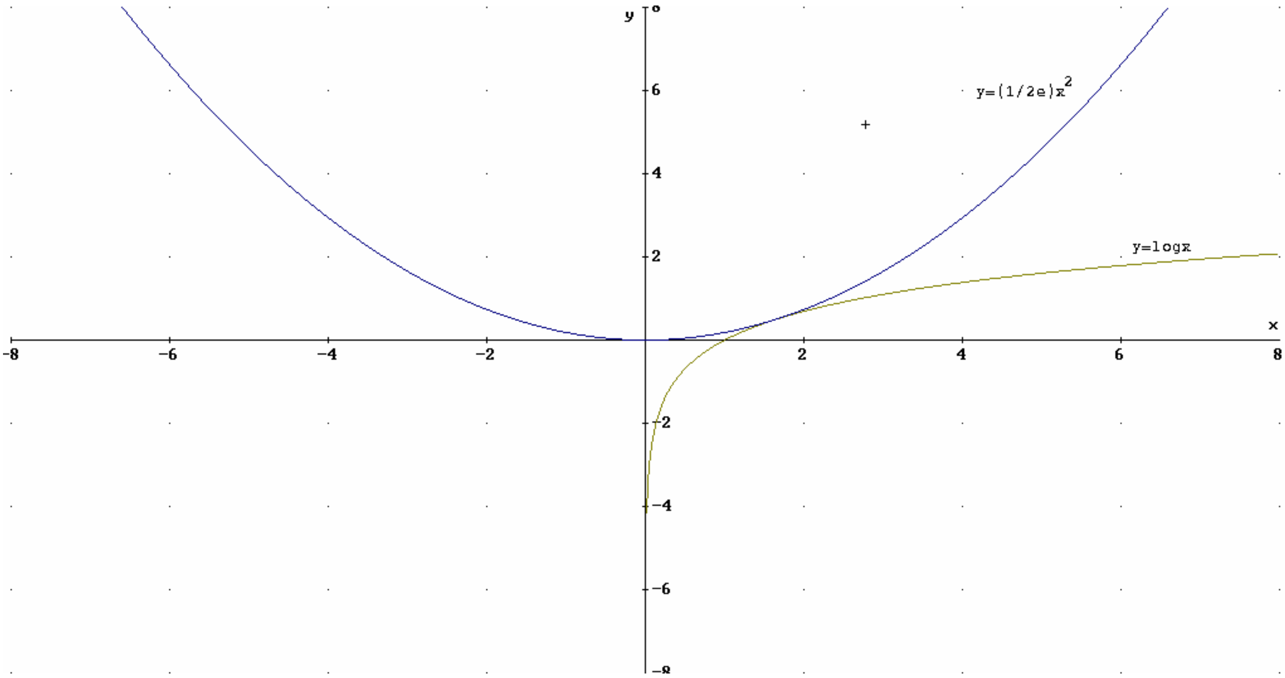
$f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$; $\quad g(x) = ax^2 \Rightarrow g'(x) = 2ax$. Quindi

$f'(x) = g'(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = 2ax \Rightarrow 1 = 2ax^2 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ ($x > 0$ essendo $\log x$ definita per $x > 0$)

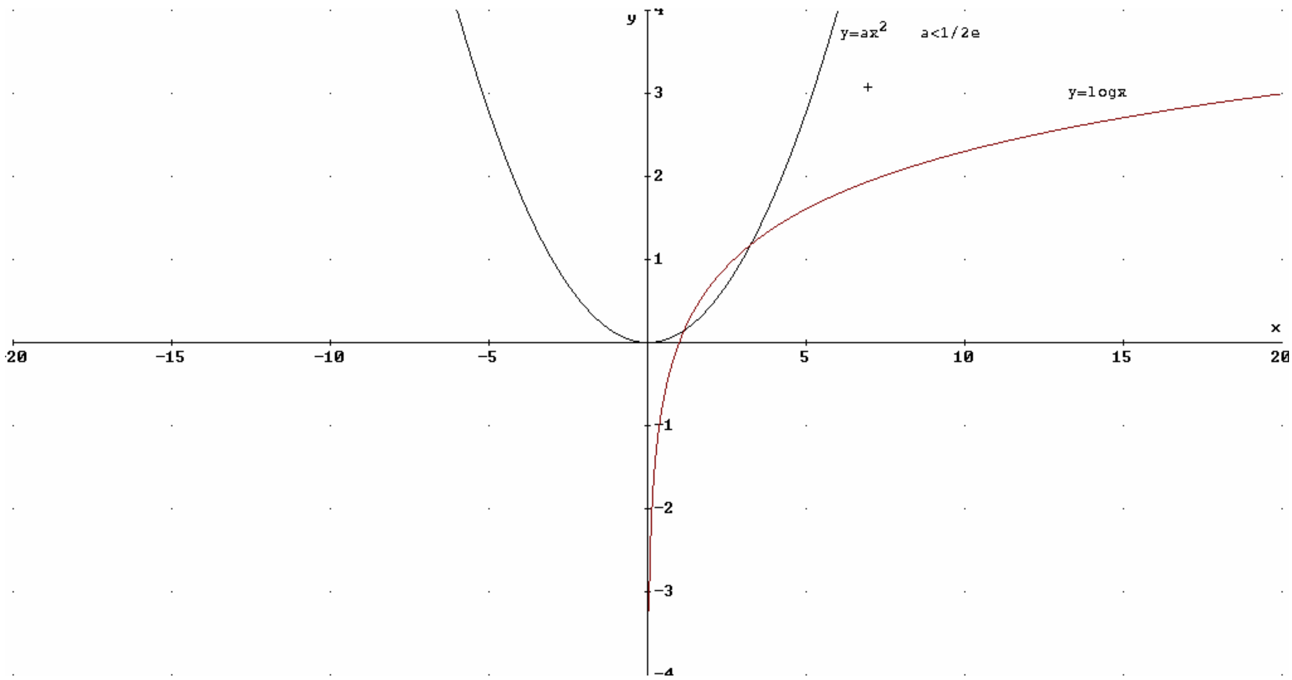
Pertanto i grafici di f e g hanno tangenti parallele nel punto di ascissa : $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$;

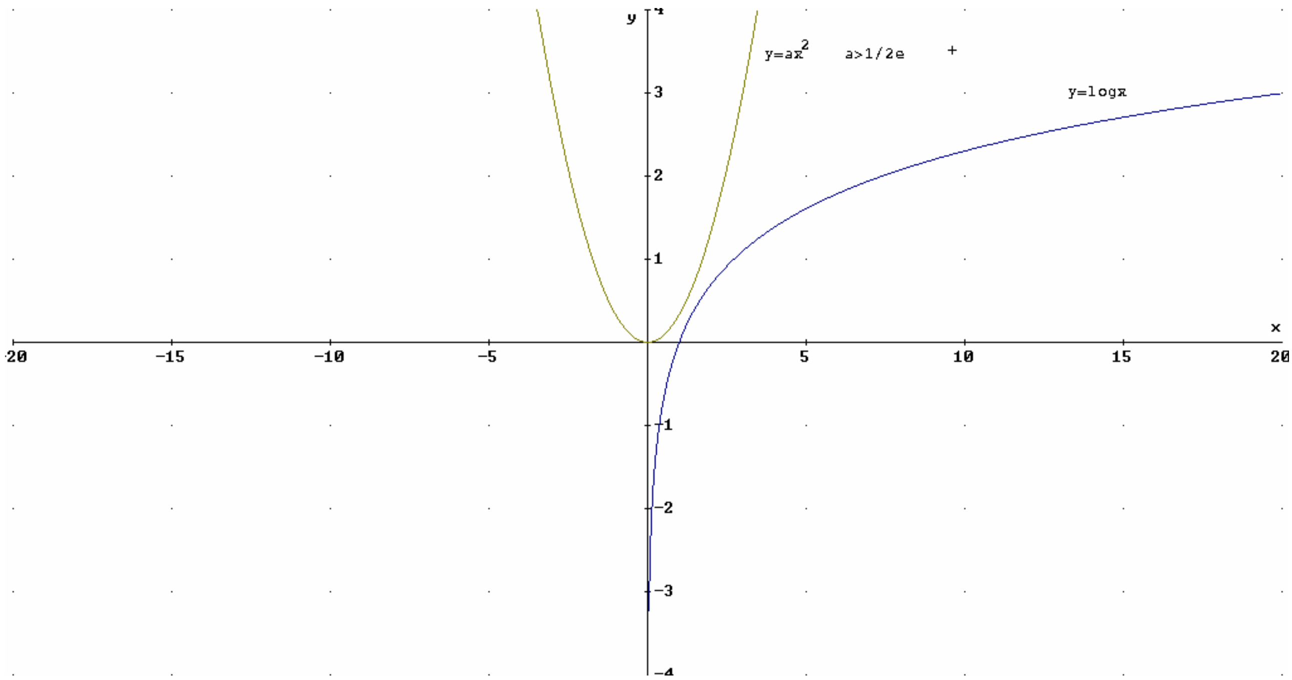
D’altra parte : $g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=2\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}$ e pertanto detti grafici sono tangenti se

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow \log\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \sqrt{e}=\frac{1}{\sqrt{2a}}\Rightarrow e=\frac{1}{2a}\Rightarrow a=\frac{1}{2e}$$



Se ne deduce che per $0<a<\frac{1}{2e}$ la parabola è più aperta ,interseca il grafico di g in due punti e perciò l’equazione $\log x = ax^2$ ammette due soluzioni distinte, per $a=\frac{1}{2e}$ ammette due soluzioni coincidenti mentre per $a>\frac{1}{2e}$ la parabola è meno aperta, non interseca il grafico di g e quindi l’equazione detta non ammette soluzioni,come si nota osservando i grafici seguenti:



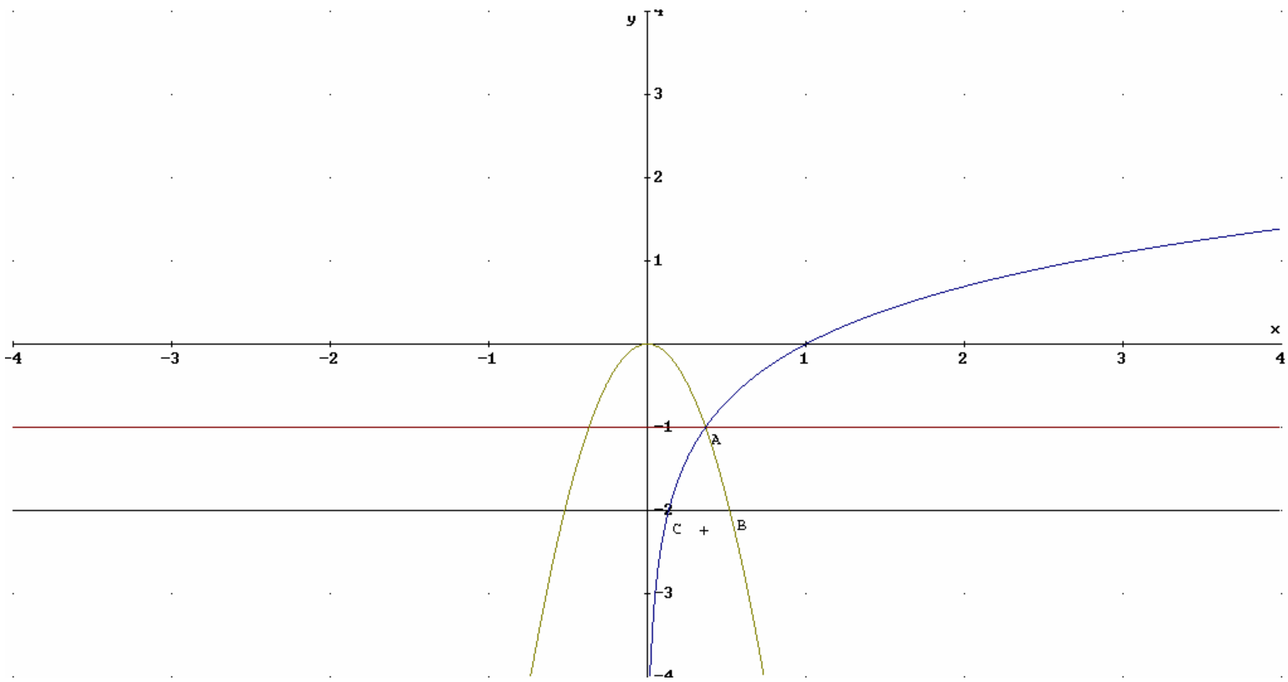


Punto 2.

$$a = -e^2 \Rightarrow g(x) = -e^2 x^2$$

$$\begin{cases} y=-1 \\ y=\log x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{e} \\ y=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-1 \\ y=-e^2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{e} \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2 \\ y=\log x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{e^2} \\ y=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2 \\ y=-e^2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{e} \\ y=-2 \end{cases}$$ ricordiamo che: $x>0$



$C\left(\frac{1}{e^2},-2\right)$; $\qquad A\left(\frac{1}{e},-1\right)$; $\qquad B\left(\frac{\sqrt{2}}{e},-2\right)$

Considerando le funzioni inverse di *f(x)* e *g(x)* : $x=e^y$ e $x=\frac{1}{e}\sqrt{-y}$ (ricordiamo che y < 0 e quindi –y > 0) detta *S* l'area richiesta si ha:

$$S=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{e}(-y)^{\frac{1}{2}}-e^y\right)dy=-\frac{1}{e}\int_{-2}^{-1}(-1)(-y)^{\frac{1}{2}}dy-\int_{-2}^{-1}e^y dy=-\frac{1}{e}\left[\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{-1}-\left[e^y\right]_{-2}^{-1}=\frac{1}{e^2}+\frac{4\sqrt{2}-5}{3e}$$

Punto 3.

Scelto a=1, si ha *h(x) = logx – x²* definita per x > 0 ; è anche *h(x) < 0* per ogni *x.*

Inoltre : $h'(x)=\frac{1}{x}-2x=\frac{1-2x^2}{x}>0\Rightarrow 0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ perciò $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ è un punto di massimo

Inoltre : $h''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 < 0 \quad \forall\, x \in$ all'insieme di definizione di $\mathrm{h}(\mathrm{x})$ Ciò implica che *h(x)* ha la concavità sempre rivolta verso il basso.

Inoltre : $\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$, pertanto il grafico di h(x) è il seguente: