Liceo della Comunicazione 20 giugno 2013

PROBLEMA 2

SOLUZIONE

1.Il grafico della curva Γ, di equazione $y = 2\ln(x-1)$, si ottiene dalla curva di equazione $Y = \ln X$ attraverso la trasformazione

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = 2Y \end{cases}$$

che rappresenta una traslazione verso destra di un'unità , lungo l'asse delle x, e una dilatazione di fattore 2 lungo la direzione dell'asse y.

In particolare, Γpassa per il punto di coordinate (2;0) ed ha come asintoto verticale la retta x=1

Applicando all'equazione di Γ le seguenti trasformazioni

$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ simmetria rispetto all'asse y

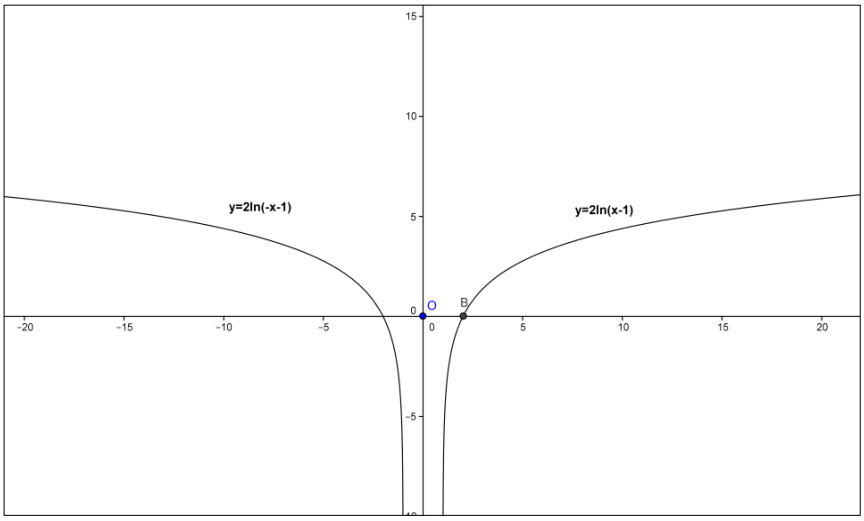
$\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = y \end{cases}$ simmetria rispetto alla retta $x = 2$

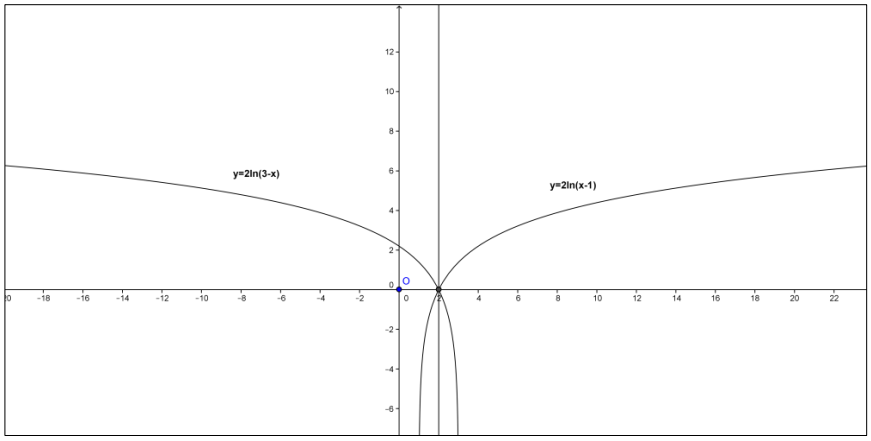
$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ simmetria rispetto alla retta $y = x$

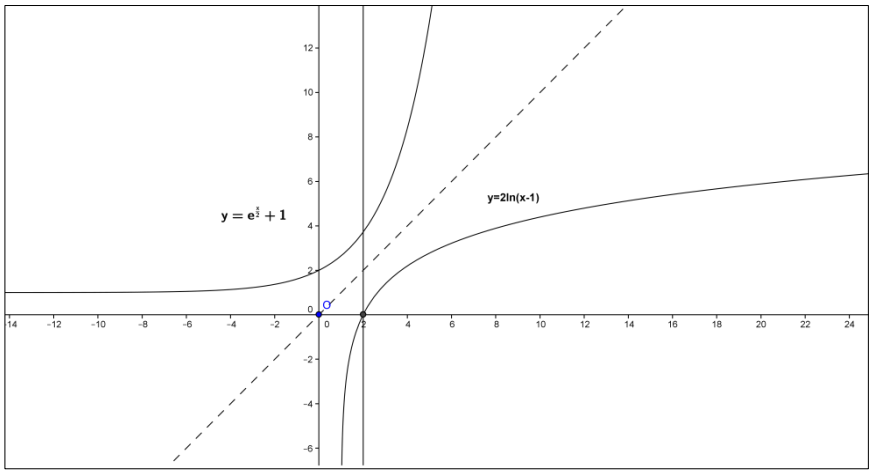
si ottengono, rispettivamente, le seguenti equazioni *(nelle coordinate x e y*)

$y = 2\ln(-x-1)$	$y = 2\ln(3-x)$	$x = 2\ln(y-1) \rightarrow y = e^{\frac{x}{2}} + 1$

GRAFICI



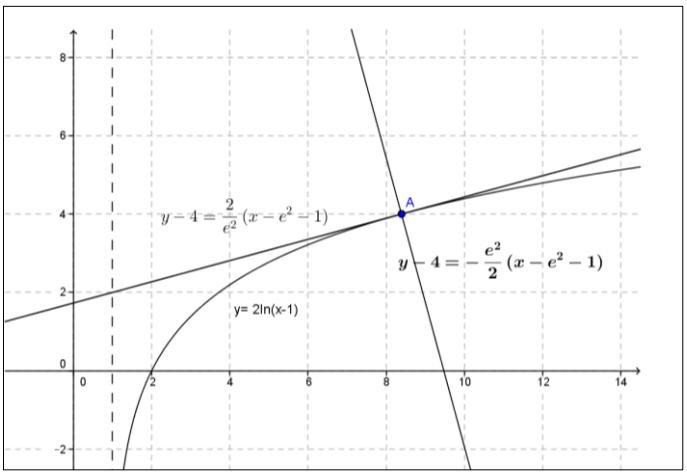


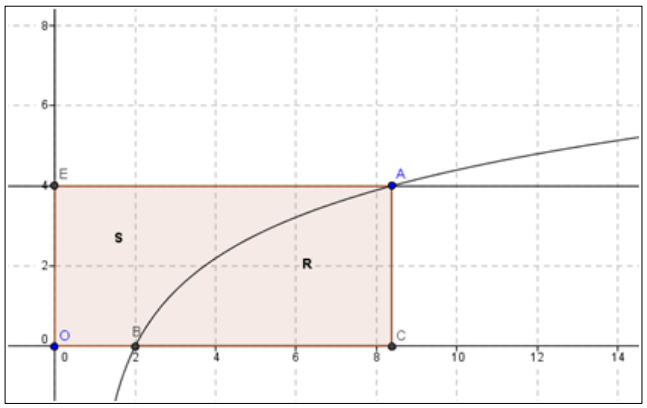


2. Il punto A di ascissa $x = e^2 + 1$ ha ordinata $y = 2 \ln e^2 = 4$

Essendo $f'(x) = \frac{2}{x-1}$ il coefficiente angolare della tangente in A è uguale a $f'(e^2+1) = \frac{2}{e^2}$ e quello della normale $-\frac{e^2}{2}$

L'equazione della normale è $y - 4 = -\frac{e^2}{2}(x - e^2 - 1)$





3 L'arco AB di Γ divide il rettangolo ACOE , la cui area è $4(e^2+1)$, in due regioni *(cfr- figura a lato)*

R è un trapezoide di base BC, relativo alla funzione $f(x) = 2\ln(x-1)$

S è un trapezoide di base OE, relativo alla funzione $g(y) = e^{\frac{y}{2}} + 1$

L'area di R pertanto può essere calcolata :

a) In modo diretto: $\int_2^{e^2+1} 2\ln(x-1)\,dx$	b) come differenza di due aree : $4(e^2+1) - \int_0^4 \left(e^{\frac{y}{2}}+1\right) dy$
metodo di integrazione per parti $2\int ln(x-1)dx = 2\left((x-1)\,ln(x-1) - \int \frac{x-1}{x-1}dx\right) =$ $2\left((x-1)\,ln(x-1) - x\right) \rightarrow$ $\int_2^{e^2+1} 2\,ln(x-1)\,dx = 2(2e^2 - e^2 - 1 + 2) = 2(e^2+1)$	$\int_0^4 \left(e^{\frac{y}{2}}+1\right) dy = \left[2e^{\frac{y}{2}} + y\right]_0^4 = 2e^2 + 2 \rightarrow$ $4(e^2+1) - \int_0^4 \left(e^{\frac{y}{2}}+1\right) dy = 2(e^2+1)$
Area $= 2(e^2+1)$ **$\cong 16,78$**	

4.Il volume di Ω può essere calcolato

a) in modo diretto :	b) come differenza tra il cilindro generato dalla rotazione del rettangolo ACOE (di volume $4\pi(e^2+1)^2$) e il solido generato dalla rotazione di S, intorno all'asse y.
$2\pi \int_2^{e^2+1} 2x\ln(x-1)\,dx$ (metodo de gusci cilindrici)= $2\pi\left[(x^2-1)\ln(x-1) - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_2^{e^2+1} = \pi(3e^4+4e^2+5)$ *dove l'integrale indefinito è stato calcolato con il metodo di integrazione per parti*	$4\pi(e^2+1)^2 - \pi\int_0^4 \left(e^{\frac{y}{2}}+1\right)^2 dy = 4\pi(e^2+1)^2 - \pi\,[e^y + 4e^{\frac{y}{2}} + y]_0^4 =$ $\pi(3e^4+4e^2+5)$
Volume = **$\pi(3e^4+4e^2+5) \cong 623,14$**	