Sessione straordinaria 2013
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

A T T E N Z I O N E

Il plico relativo a questa prova contiene due temi: il primo destinato ai corsi sperimentali, il secondo ai corrispondenti corsi di ordinamento e ai candidati esterni che intendono sostenere gli esami sui programmi previsti per i corsi ordinari.

In assenza di uno dei due tipi di corsi summenzionati, il tema ad esso destinato non dovrà essere ovviamente utilizzato, ma dovrà rimanere agli atti della Commissione.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Data la semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$, si prenda su di essa un punto P e si tracci il raggio OQ parallelo ad AP.

1. Posto $P\hat{A}B = \alpha$, si calcoli il rapporto:

$$\frac{AP + PQ}{QB + BA}$$

e lo si esprima in funzione di $x = sen\frac{\alpha}{2}$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x+1}.$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si scriva l'equazione della retta s che congiunge i punti estremanti relativi di γ e si verifichi che essa passa per il punto d'intersezione degli asintoti. Si calcoli inoltre, in gradi e primi (sessagesimali), l'ampiezza dell'angolo acuto Φ che s forma con l'asintoto obliquo.
4. Si calcoli l'area della regione di piano σ, delimitata dall'asse x, da γ e dai suoi asintoti.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto P di ascissa $x = e$ e si determini l'ascissa del punto C in cui essa incontra l'asse x. Si calcoli inoltre l'area del semicerchio Γ, situato nel I quadrante, avente il centro in C e raggio uguale alla distanza di C dall'origine O.
3. Si calcoli l'area della superficie piana Σ, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette $x = e$, $x = e^2$.
4. Si scelga a caso un punto all'interno del semicerchio Γ. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla superficie piana Σ.

Sessione straordinaria 2013
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Un ufficiale della guardia di finanza, in servizio lungo un tratto rettilineo di costa, avvista una motobarca di contrabbandieri che dirige in linea retta, perpendicolarmente alla costa, verso un vecchio faro abbandonato. L'angolo tra la direzione della costa e il raggio visivo dell'ufficiale che guarda la motobarca è di 34,6°; il natante si trova a 6 miglia marine dal faro e si muove con una velocità di 18 nodi (miglia marine all'ora). L'ufficiale ordina di salire immediatamente in macchina, in modo da raggiungere il faro, percorrendo una strada parallela alla spiaggia, 10 minuti prima che vi approdino i contrabbandieri, per coglierli con le mani nel sacco. A che velocità media, in km/h, deve muoversi l'automezzo della guardia di finanza per arrivare nei tempi previsti? (Un miglio marino = 1853,182 m).

2. Si calcoli il limite della funzione $(1+x^2)^{\frac{1}{sen^2 x}}$, quando x tende a 0.

3. Nel triangolo ABC l'angolo in B misura $\pi/6$ e quello in C misura x. Si determini l'angolo x in modo che, detta H la proiezione ortogonale di A sulla retta BC, la quantità:

$$\frac{BC+HC}{AC},$$

   risulti massima.

4. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \log_x 2$$

   nel punto P di ascissa $x = 2$.

5. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = \ln x$ e dall'asse x nell'intervallo $1 \le x \le e$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza quadrupla della base. Si calcoli il volume di Σ.

6. Si disegni la curva di equazione

$$y = |x^2 - 1|$$

   Si scrivano le equazioni delle tangenti condotte nei punti A e B di ordinata nulla. Si verifichi che le due coppie di rette trovate individuano un rombo, del quale si chiedono le misure del perimetro e dell'area.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

7. Tenuto conto che:

$$\ln 3 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1 + tg^2 x}{tgx}\, dx,$$

si calcoli un'approssimazione di ln3, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8. Si risolva l'equazione:

$$\log_2(\log_3 x) = 3.$$

9. Un cono equilatero di piombo (densità $\rho = 11{,}34\ \mathrm{g}/cm^3$), avente il raggio r = 5 cm, presenta all'interno una cavità di forma irregolare ed ha la massa m = 2 kg. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla cavità.

10. Un missile ha la probabilità 3/10 di colpire un bersaglio. Quanti missili si debbono lanciare perché la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta sia maggiore dell'80%?

___

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia data una circonferenza di centro O e raggio 1 e una sua corda MN, condotta alla distanza x da O.

1. Si calcoli il rapporto $f(x)$ fra l'area del triangolo, formato dalla corda MN e dalle tangenti alla circonferenza in M ed N, e quella del rettangolo di lato MN, inscritto nella circonferenza, controllando che risulta:
$$f(x) = \frac{1-x^2}{4x^2}.$$
2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si scrivano le equazioni delle tangenti a γ nei punti di intersezione con l'asse x e si calcoli l'area del triangolo T che esse formano con l'asse x.
4. Si calcoli l'area della superficie piana Σ, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta $y = 1/2$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si scrivano le equazioni delle tangenti a γ nei punti di flesso e si calcoli l'area del triangolo che esse formano con l'asse x.
3. Si calcoli l'area della superficie piana S, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.
4. La superficie S è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Un ufficiale della guardia di finanza, in servizio lungo un tratto rettilineo di costa, avvista una motobarca di contrabbandieri che dirige in linea retta, perpendicolarmente alla costa, verso un vecchio faro abbandonato. L'angolo tra la direzione della costa e il raggio visivo dell'ufficiale che guarda la motobarca è di 34,6°; il natante si trova a 6 miglia marine dal faro e si muove con una velocità di 18 nodi (miglia marine all'ora). L'ufficiale ordina di salire immediatamente in macchina, in modo da raggiungere il faro, percorrendo una strada parallela alla spiaggia, 10 minuti prima che vi approdino i contrabbandieri, per coglierli con le mani nel sacco. A che velocità media, in km/h, deve muoversi l'automezzo della guardia di finanza per arrivare nei tempi previsti? (Un miglio marino = 1853,182 m).

2. Si calcoli il limite della funzione $(1+x^2)^{\frac{1}{sen^2 x}}$, quando x tende a 0.

3. Nel triangolo ABC l'angolo in B misura $\pi/6$ e quello in C misura x. Si determini l'angolo x in modo che, detta H la proiezione ortogonale di A sulla retta BC, la quantità:
$$\frac{BC+HC}{AC},$$
risulti massima.

4. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x)=\log_x 2$$
nel punto P di ascissa $x=2$.

5. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y=\ln x$ e dall'asse x nell'intervallo $1\le x\le e$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza quadrupla della base. Si calcoli il volume di Σ.

6. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:
$$f(x)=\frac{e^x}{e^x-1}.$$

7. Si determini il campo di esistenza della funzione:
$$y=\arccos(e^{2senx-1}), \qquad \text{con} \quad 0\le x\le 2\pi.$$

8. Un cubo di alluminio (densità $\rho = 2{,}7\ \text{g}/cm^3$), avente lo spigolo l = 10 cm, presenta all'interno una cavità a forma di cilindro equilatero, avente il raggio di lunghezza $r_c = 2{,}5$ cm. Si calcoli la massa m del cubo.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

9. Si calcoli il valore medio della funzione:

$$y = \frac{x}{\cos^2 x},$$

nell'intervallo $0 \le x \le \pi/3$.

10. Un delfino si trova nel punto A del bordo ovest di una piscina circolare. Nuota in linea retta per 12 m, e tocca con il naso il bordo della piscina nel punto B. Si gira e nuota in una direzione diversa in linea retta per 5 m, e arriva nel punto C situato sul bordo della piscina e diametralmente opposto al punto A dal quale era partito. Se la profondità dell'acqua è ovunque di 2,50 m, quanti litri d'acqua sono contenuti nella piscina?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.