# I compiti di maturitá scientifica 2013

*Lamberto Lamberti*

I compiti di matematica assegnati per la Maturitá Scientifica 2013[1] , due problemi e dieci quesiti, allineati allo stile dei precedenti, meritano particolare attenzione per la serietá delle domande proposte, la loro semplicitá e la quasi completa eliminazione di complicazioni algoritmiche.

Stante l'esistenza nei licei scientifici di due percorsi culturali, uno detto di Ordinamento ed uno tradizionalmente indicato con l'acronimo PNI, il Ministero assegna due prove scritte, del resto abbastanza simili tra loro: due problemi e 10 quesiti.
Il testo richiede allo studente di svolgere uno dei due problemi e di rispondere ad almeno cinque quesiti.

Il carattere sequenziale della matematica impone prove che coinvolgono inevitabilmente anche argomenti trattati in anni scolastici precedenti: cosí l'Analisi, programma principale dell'ultimo anno del Liceo Scientifico, é presente, in entrambi i compiti, nei due problemi ma su solo tre dei 10 quesiti.

Le note che seguono non costituiscono una soluzione guidata e completa delle prove assegnate: sono piuttosto sensazioni di prima lettura, qualche idea di svolgimento, qualche commento sulla gestione dell'insegnamento della matematica nel principale Liceo.

## 1. I problemi del compito di ordinamento

### 1.1. Il primo Problema.

Le nozioni richieste, nel primo dei due problemi, interamente rivolto al programma d'Analisi dell'ultimo anno, sono state, oltre la capacitá di realizzare grafici,
- il Teorema fondamentale del Calcolo,

[1] http://archivio.pubblica.istruzione.it/argomenti/esamedistato/secondo_ciclo/prove/2013/M557.pdf
http://archivio.pubblica.istruzione.it/argomenti/esamedistato/secondo_ciclo/prove/2013/Y557.pdf

- il concetto di valor medio di una funzione su un intervallo,

- qualche idea del legame tra integrazione e volume di un solido, naturale estensione di quanto studiato per l'area dei sottografici.

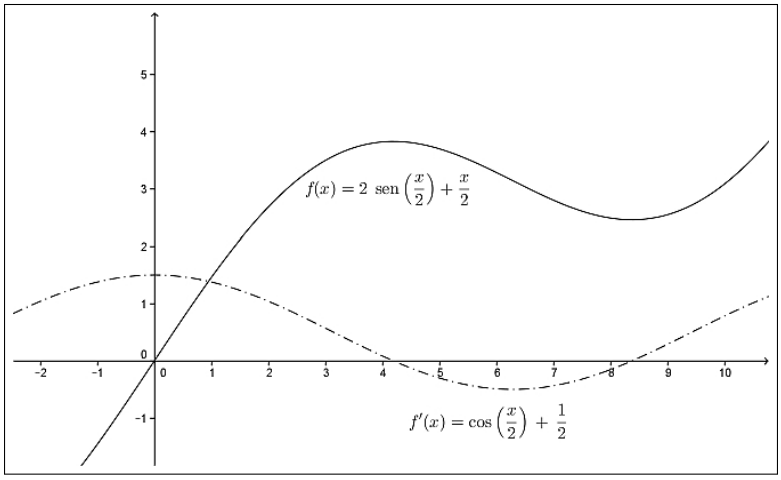


FIGURA 1. Ordinamento: Problema 1 $f(x), f'(x)$

L'intero problema ruotava intorno ad una funzione integrale del resto esplicitabile eseguendo la semplice integrazione

$$f(x) = \int_0^x \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)\, dt = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}x$$

**1:** La prima domanda riguardava i valori della derivata, cioé della funzione integranda, nei due punti $x = 0$ e $x = 2\pi$.

**2:** La seconda domanda si riferiva ai grafici di $f(x)$ e di $f'(x)$: ogni arricchimento era possibile, da intelligenti approcci qualitativi ad una diligente procedura standard.

**3:** La terza domanda riguardava il *valor medio*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)dx = \frac{1}{2\pi}f(2\pi) = \frac{1}{2}$$

chi non avesse ricordato il significato di *tale parola*....

**4:** La quarta e ultima domanda si riferiva al volume $W$ di un solido: chiedeva, di fatto, un altro integrale

$$W = \int_0^4 A(x)dx = \int_0^4 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\, dx = \frac{24}{\pi}$$

### 1.2. Il secondo Problema.

Abbastanza analogo al primo, il secondo problema ruotava, a sua volta, intorno alla funzione

$$f(x) = \frac{8}{4 + x^2}$$

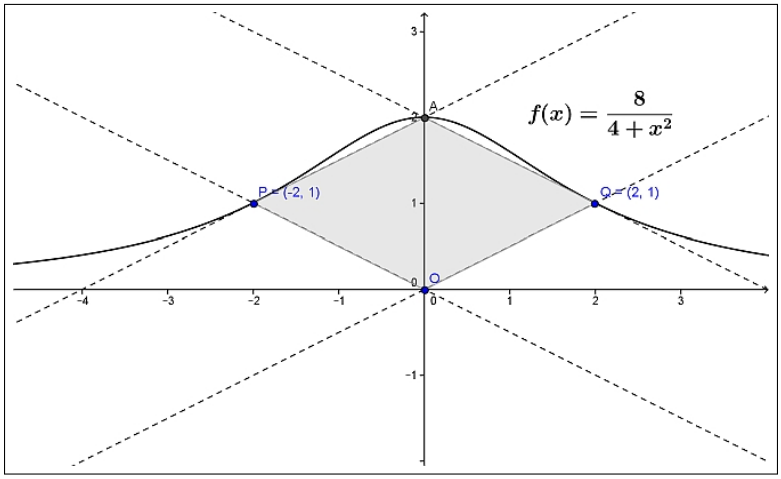


FIGURA 2. Ordinamento: Problema 2: $f(x)$, tangenti, rombo.

**1:** La prima domanda, abbastanza onerosa, riguardava il grafico $\Phi$ della $f(x)$, le rette tangenti in due punti $P$ e $Q$, simmetrici rispetto all'asse $y$, e alcune semplici proprietá del quadrilatero, simmetrico rispetto all'asse $y$, formato dalle due tangenti e dalle due rette che congiungono $P$ e $Q$ con l'origine.

**2:** La seconda domanda chiedeva di riconoscere in $y = f(x)$ l'equazione del luogo di un punto costruito con un apparentemente complicato procedimento geometrico che coinvolgeva una circonferenza $\Gamma$ di centro $(0, 1)$ e raggio 1 e due rette, una per l'origine e l'altra l'orizzontale $y = 2$.

**3:** La terza domanda si riferiva alle aree di due sottografici di $f(x)$: quello $R$ relativo all'intervallo $[0, 2]$ e quello relativo all'intero asse $x$, aree riconducibili a due integrali quasi immediati, dei quali il secondo improprio:

$$\int_0^2 \frac{8}{4 + x^2}\, dx = \pi, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8}{4 + x^2}\, dx = 4\pi.$$

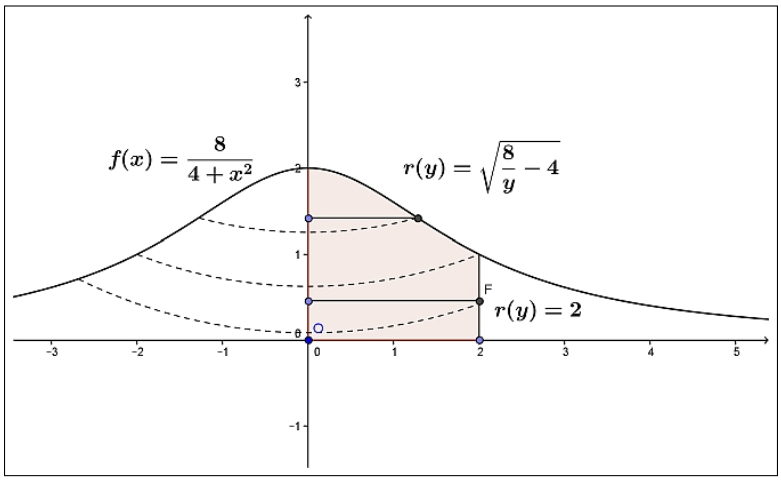


FIGURA 3. Ordinamento Problema 2: La rotazione di $R$ intorno all'asse $y$.

**4:** La quarta domanda si riferiva ancora al volume di un solido: quello generato ruotando la regione $R$, sottografico di $f(x)$ relativo all'intervallo $[0, 2]$, intorno all'asse $y$.

Pensando tale solido come solido di rotazione occorreva calcolare il raggio di rotazione $r(y) \geq 0$, dipendente dalla quota $y$:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 & \to \quad r(y) = 2 \\ 1 \leq y \leq 2 & \to \quad r(y) = \sqrt{8/y - 4} \end{cases}$$

Il volume pertanto era:

$$W = \pi \int_0^2 r^2(y)dy = \pi \int_0^1 4dy + \pi \int_1^2 \left(\frac{8}{y} - 4\right) dy = 8\,\pi\,\ln(2)$$

Altri approcci, si é parlato anche di un *metodo dei gusci cilindrici*, erano altrettanto non ovvi.

### 1.3. Un breve commento.

Il primo problema é, forse, troppo semplice: l'idea di indirizzare verso l'uso del teorema fondamentale del calcolo in un caso nel quale tale teorema era superfluo non sembra ottimale.
Anche l'inizio della quarta domanda appare confuso: ai fini del volume del solido la regione $R$ e la curva $\Sigma$ non hanno niente a che vedere, gli unici dati che contano sono l'intervallo $0 \leq x \leq 2$ e l'area assegnata $A(x) \geq 0$ delle sezioni.

Il secondo problema sembra la brutta copia del primo: domande simili ma calcoli in un certo senso inutilmente allungati.

L'ultima domanda, vittima forse di un refuso tra asse $y$ e asse $x$, termina rinunciando addirittura a pretendere una risposta: si rinuncia al calcolo dell'integrale quando, invece, la difficoltá vera, e forse inopportuna, sta nell'arrivare a quell'integrale (o a qualsiasi altro ad esso equivalente).

## 2. I problemi del compito PNI

### 2.1. Il primo Problema.

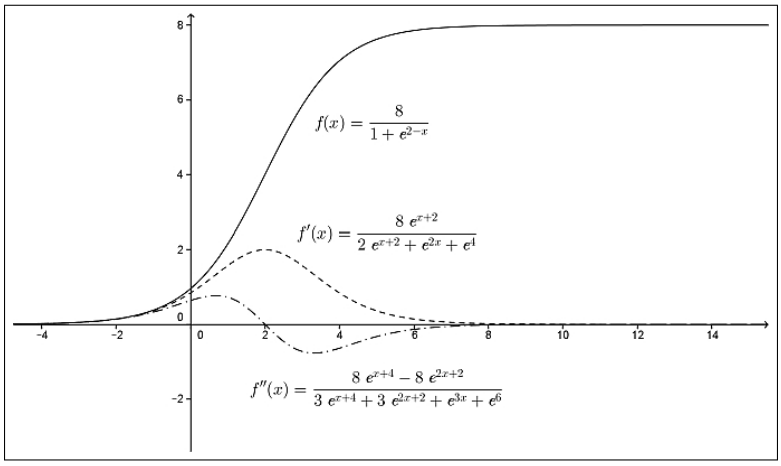


FIGURA 4. $f(x), f'(x), f''(x)$

Il problema si componeva di tre parti, articolate su quattro domande:

**1:** la prima, *analisi qualitativa,* richiedeva il possibile grafico e l'esistenza del massimo della derivata prima $f'(x)$ avendo assegnati i grafici della funzione $f(x)$ e della derivata seconda $f''(x)$.

Il grafico della $f''(x)$, positivo in $[0, 2]$ e negativo dopo mostrava chiaramente che $f'(x)$ avrebbe dovuto essere crescente in $[0, 2]$ e decrescente dopo, donde il massimo raggiunto in $x_0 = 2$.

L'esistenza dell'asintoto orizzontale per $f(x)$ e l'informazione aggiunta $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$ permetteva facilmente di proporre l'andamento qualitativo della funzione $f'(x)$, vedi Figura (4)

**2:** la seconda parte richiedeva di interpretare $x$ come variabile temporale e la $f(x)$ come la numerositá (in una qualche scala continua) di una popolazione biologica al tempo $x$:

- numerositá crescente dal valore 1 raggiunto al tempo 0 al valore 8 asintotico al tendere del tempo all'infinito,
- il flesso (annullamento della derivata seconda) osservato al tempo $x_1 = 2$ suggeriva che il tasso di crescita della popolazione, pur sempre positivo, fosse anch'esso crescente nel primo periodo $0 \leq x \leq 2$ e invece decrescente nel periodo successivo.

Il nome tradizionale di una dinamica biologica del tipo indicato é quello di *crescita logistica*.

**3:** La terza parte richiedeva di verificare che tra le funzioni

$$F(x) = \frac{a}{1 + e^{b-x}}$$

l'unica che soddisfacesse ai requisiti qualitativi indicati nei grafici assegnati fosse quella con $a = 8$ e $b = 2$.

Richiedeva inoltre l'area del sottografico della

$$F''(x) = \left(\frac{8}{1 + e^{2-x}}\right)''$$

relativo all'intervallo $[0, 2]$

$$Area = \int_0^2 F''(x)dx = F'(2) - F'(0) = 2 - \frac{8e^2}{(1 + e^2)^2}$$

### 2.2. Il secondo Problema.

Il secondo problema, molto standard negli enunciati e nelle questioni richieste, chiede, sostanzialmente il grafico della funzione $f(x) = x^3 \ln(x)$ e qualche questione ad esso riconducibile.

**1:** Il primo punto richiede il grafico $\gamma$ di $f(x) = x^3 \ln(x)$, e i valori approssimati delle ascisse di minimo e di flesso.

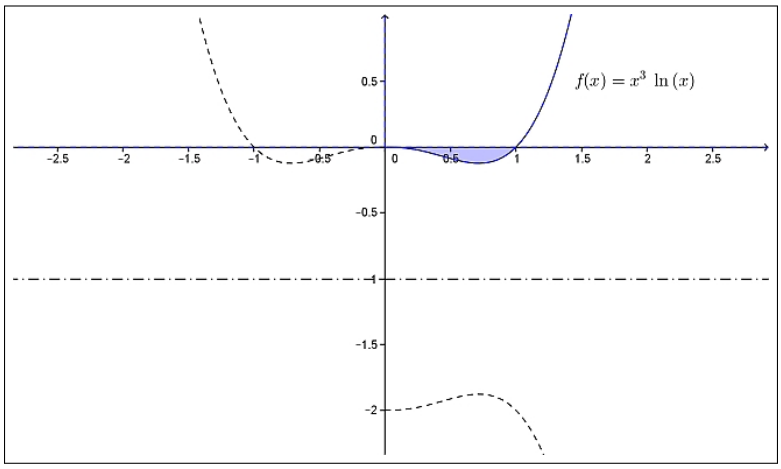


FIGURA 5. $f(x) = x^3 \ln(x)$, la regione $R$, le curve simmetriche

**2:** La seconda domanda chiedeva di determinare la parabola con asse verticale, passante per l'origine e tangente a $\gamma$ nel punto $P = (1, 0)$ in cui $\gamma$ traversa l'asse $x$

$$y = ax(x-1) \quad \rightarrow \quad a = 1 \quad \rightarrow \quad y = x(x-1)$$

Forse sarebbe stato preferibile chiedere un polinomio di Taylor relativo a tale punto....

**3:** Nel terzo punto si chiedeva l'area (un integrale improprio...) della regione

$$R: \ \ 0 < x < 1, \ x^3 \ln(x) \leq y \leq 0$$

$$Area(R) = \lim_{h \to 0^+} \left\{ \frac{1}{4} h^4 \ln(h) - \frac{h^4}{16} + \frac{1}{16} \right\} = \frac{1}{16}$$

Tenuto conto che le precedenti unitá di misura erano espresse in decimetri, e quindi il valore dell'area doveva essere inteso in $dm^2$ si chiedeva la conversione di tale misura in

$$\frac{10^4}{16} mm^2$$

**4:** Il quarto punto si riferiva alle trasformazioni per simmetria assiale, vedi Figura 5:

- la simmetrica di $\gamma$ rispetto all'asse $y$, il grafico di $-x^3 \ln(-x)$,
- la simmetrica rispetto all'orizzontale $y = -1$, il grafico di $-2 - x^3 \ln(x)$.

**2.3. Qualche osservazione.**
Il primo problema é ragionevole per il programma svolto e per il tempo assegnato: un unico neo, riferito al testo, nel quale alla famiglia di funzioni proposta al punto 3) doveva essere assegnato un nome diverso da quello $f(x)$ giá usato nei punti precedenti, ad esempio, come fatto sopra, il nome $F(x)$.

Anche l'enunciato del punto 4) non fa onore al testo: la frase

*Nelle ipotesi del punto 3)...*

é scorretta: nel punto 3) si prova un risultato, non si *formulano ipotesi...*!

Lo stile particolarmente standard del secondo problema lo ha reso certamente accessibile ad ogni studente mediamente preparato.
Volendo sottolineare qualche neo nella formulazione si puó biasimare la tradizionale vecchia abitudine di prescindere, per numerose funzioni, dall'uso delle parentesi ($\ln x$ in luogo del piú corretto $\ln(x)$), come pure sorridere della pomposa retorica con cui si precisa che il sistema cartesiano sia *ortogonale e monometrico* !

## 3. I quesiti

La somiglianza delle due prove, Ordinamento e PNI, é particolarmente evidente nei dieci quesiti, in entrambe i compiti i numeri 1, 3,4,5,6, sono comuni.

I quesiti proposti per il Corso di Ordinamento appaiono complessivamente preparati con piú cura di quelli, un po' retorici, proposti per il PNI.

**3.1. La parte comune.** Diciamo subito che dei 5 quesiti comuni 4 erano assolutamente alla portata di ogni studente preparato mentre uno, il numero 6, appariva rivolto a studenti in un certo senso eccezionali: si trattava di una delle domande che, da alcuni anni, incontriamo nelle varie gare di matematica, dai Giochi di Archimede, alle selezioni di Cesenatico, alle Olimpiadi, ecc.

Il quesito *eccezionale* era, piú o meno, il seguente

> *Le sette cifre* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ *consentono di scrivere* $7! = 5040$ *numeri di 7 cifre diversi:* $1234567, 3452167, \ldots,$ *numeri che possono essere disposti in ordine crescente. In tal caso qual'é il settimo di tali numeri ? e quale il* $721-$*esimo ?*

Il quesito sarebbe stato accolto piú facilmente se accompagnato da una qualche maieutica, tipo

- qual'é il primo (domanda fondamentale che mancava nel quesito): risposta, ovvia, 1234567
- qual'é il secondo (domanda che mancava nel quesito): risposta, meno ovvia, 1234576
- qual'é il settimo ? Tenuto conto che si possono permutare in $3! = 6$ modi le ultime tre cifre 567 del primo si intuisce che i primi 6 numeri abbiano le prime quattro cifre fisse 1234 e le ultime tre formate dalle 6 permutazioni di 5, 6, 7.

  Il settimo quindi é 1235467, il primo con un 5 al quarto posto !
- qual'é il $721-$esimo ? Tenuto conto che si possono permutare in $6! = 720$ modi diversi le ultime sei cifre 234567 del primo, si intuisce che il $721-$esimo sia 2134567, il primo che comincia con la cifra 2.

Gli altri quattro quesiti comuni, 1, 3, 4, 5 erano i seguenti:

**1:** *il terzo lato di un triangolo con due lati di lunghezze 2 e 3 e area 3,*:

la risposta é ottenibile per strade diverse, senza trascurare naturalmente quella intuitiva: scelto come base del triangolo uno dei due lati, per esempio quello di lunghezza 3, l'altezza non puó essere piú di 2 e quindi l'area,

$$\tfrac{1}{2}\, base \times altezza \leq 3.$$

L'area viene 3 solo se l'altezza é 2, cioé se il triangolo é rettangolo, circostanza nella quale il terzo lato, l'ipotenusa, é

$$\sqrt{2^2 + 3^2}.$$

**3:** *determinare tra le rette r per un punto* $B = (-6, -8)$ *quella piú distante da* $A = (2, -1)$:

la distanza di una qualsiasi retta per $B$ da $A$ é minore o uguale alla distanza $\overline{AB}$ tra i due punti. Da questa osservazione, e da un minimo di geometria analitica discende che

la retta per $B$ perpendicolare ad $AB$

$$8(x+6)+7(y+8)=0 \quad \rightarrow \quad 8x+7y+104=0$$

é la retta cercata.

**4:** *il volume di un tronco di piramide retta a base quadrata dati i due lati $a$, $b$ dei quadrati di base e di tetto e l'altezza $h$.*

Un minimo ricordo di teoria dei triangoli simili permetteva di conoscere l'altezza dell'intera piramide e, quindi, con formule elementari, il suo volume e quello del tronco.

**5:** *il volume di un parallelepipedo (nel caso dei quesiti una valigia o un libro) é pari al prodotto delle tre dimensioni. Come varia percentualmente il volume e/o la superficie laterale se le tre dimensioni sono, tutte e tre aumentate di una assegnata percentuale ?*

Bastava che lo studente pensasse ad esempio al raddoppio delle 3 dimensioni che conduce ad un volume $2^3 = 8$ volte e a una superficie $2^2 = 4$ volte quelli iniziali per rispondere, facilmente, ad ogni possibili altra variazione.

É interessante notare che qualcuno ha voluto riconoscere in questi due quesiti numero 5 lo stile di Bruno De Finetti: stile del resto fortunatamente presente in tanta parte del migliore insegnamento matematico.

### 3.2. La parte specifica del Compito di Ordinamento.

I cinque quesiti non comuni erano 2, 7, 8, 9, 10: i primi due, il 2 e il 7 algebrici, gli ultimi tre relativi al programma d'Analisi svolto nell'ultimo anno.

**2:** *il dominio di* $\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}}$ rientrava nella usuale manipolazione algebrica delle disequazioni di secondo grado, e conduceva alla evidente risposta $-1 \leq x \leq 2$

**7:** *forma di un rettangolo di area 1 tale che diviso a metá con un taglio parallelo a un lato produca due rettangoli simili a quello iniziale.*

Detti $a$ e $b$ i lati e pensando di tagliare a metá il lato $b$ si doveva avere $\frac{b}{2} : a = a : b$, condizione che, unita alla $ab = 1$ conduce al rettangolo di lati $\sqrt[4]{2},\ 1/\sqrt[4]{2}$.

Gli ultimi tre quesiti erano riferiti al programma d'Analisi del quinto anno.

**8:** *Determinazione del minimo di una funzione* $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ *data sotto forma dell'integrale di una* $f$ *di cui si forniva il grafico approssimativamente su un intervallo* $[0, 4.5]$.

Tenuto presente il teorema fondamentale del calcolo, $g'(x) = f(x)$, era facile riconoscere dal segno di $f(x)$ che $g(x)$ era crescente nell'intervallo $[0, 2]$, decrescente nell'intervallo $[2, 4]$ e crescente nell'intervallo $[4, 4.5]$. Nel punto $x_0 = 4$ é raggiunto pertanto il minimo relativo e assoluto nell'intervallo $[0, 4.5]$.

**9:** *Calcolare il limite* $\lim_{x\to 0} 4\,\dfrac{\sin(x)\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

Decomposta la frazione come segue

$$\frac{\sin(x)\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{\sin(x)}{x}\ \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

si otteneva, in base a limiti ben noti, la risposta zero.

Un'obiezione minima: che c'entrava quel fattore 4 ?

**10:** *Un approccio qualitativo del legame tra il grafico di una funzione e quello della sua derivata*

Si tratta di un argomento presente nei testi piú diffusi: il legame

$$\begin{array}{ccc} \text{funzione crescente} & \to & \text{derivata positiva,} \\ \text{funzione decrescente} & \to & \text{derivata negativa} \end{array}$$

permetteva, facilmente di riconoscere nel primo dei quattro grafici proposti nel testo la risposta esatta.

### 3.3. La parte specifica del Compito PNI.

Consideriamo i cinque quesiti 2, 7, 8, 9, 10 specifici della prova PNI: i 2, 8, 10 erano relativi al programma di Analisi, i 7, 9 relativi a Probabilitá e Algebra del biennio.

**2:** *La derivata della funzione* $f(x) - f(4x)$ *nel punto* $x_0 = 1$ *sapendo le derivate* 5 *e* 7 *dell'altra,* $f(x) - f(2x)$, *nei punti* $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 2$.

La risposta, non ovvia, discendeva dal sistema

$$\left\{\begin{array}{l} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ f'(2) - 2f'(4) = 7 \end{array}\right. \quad \to \quad \left\{\begin{array}{l} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ 2f'(2) - 4f'(4) = 14 \end{array}\right. \quad \to \quad f'(1) - 4f'(4) = 19$$

**8:**

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\sin(\pi)}}{x - \pi}$$

La precisazione di non servirsi del teorema di Hopital, cioé (forse) di non servirsi del calcolo della derivata di $e^{\sin(x)}$, é francamente punitiva. L'estensore forse chiedeva di servirsi solo di limiti fondamentali noti: una trasformazione poteva pertanto essere la seguente

$$\frac{e^{\sin(x)} - 1}{x - \pi} = \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin(x)} \frac{\sin(x)}{x - \pi} = \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin(x)} \frac{-\sin(x - \pi)}{x - \pi}$$

Da cui la risposta $\ell = -1$ tenuto conto dei due limiti

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1, \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

**10:** *L'equazione* $f(x) = x^2(3 - x) - 3 = 0$ *ha due radici in* $[0, 3]$ *approssimare con due decimali la maggiore.*

La derivata $f'(x) = 6x - 3x^2$ é positiva in $[0, 2)$ e negativa in $(2, 3]$. Tenuto conto che $f(2) = 1$ e $f(3) = -3$ si riconosce che esiste una, ed una sola radice in $(2, 3)$. É abbastanza facile riconoscere, con una calcolatrice, che

$$\begin{cases} f(2.5) = 0.125 > 0, & f(2.6) = -0.296 < 0 \\ f(2.53) > 0, & f(2.54) < 0 \\ f(2.532) > 0, & f(2.533) < 0 \end{cases}$$

da cui si deduce l'approssimazione richiesta $\xi = 2.53$.

Si tratta di un quesito forse inopportuno: la stima degli errori é complessa, i *metodi iterativi* cui il testo fa riferimento sono destinati ad essere implementati su una macchina e non destinati al calcolo con carta e matita.

Nell'enunciato si perpetua inoltre l'antico equivoco tra *entitá dell'errore* e *numero di cifre decimali esatte* secondo il quale 0.999999999 e 1.00000000, con tutti i decimali diversi sarebbero tragicamente diversissimi !

**7:** *estrazione da un'urna contenente 6 palline azzurre e 4 non azzurre, la probabilitá di estrarre due* non azzurre

L'espressione fornita é leggermente semplificata rispetto al testo: la risposta

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15},$$

é ottenibile in molti modi diversi, anche elencando esplicitamente le 45 coppie estraibili...!

**9:** *Cardinalitá dei razionali e degli irrazionali*

il quesito 9, appesantito da un linguaggio poco matematico, é una domanda di cultura riferita alle cardinalitá dei razionali e degli irrazionali.

La risposta *esistono piú irrazionali che razionali* che lo studente doveva dare, magari arricchendola di qualche osservazione é, di fatto, solo una questione nozionistica, o lo studente ne era informato o non aveva senso occuparsene all'impronta.

Forse se l'intenzione era quella di appurare la padronanza dell'aggettivo *irrazionale* sarebbe stato piú adatto chiedere di indicare qualche irrazionale dimostrando le affermazioni fatte.