1. **Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato?**

Risposta: $\sqrt{13}$

Soluzione

L'area del triangolo è $\frac{1}{2}ab\,sin\,\gamma$ *dove* a *e* b *sono le misure di due lati e* γ *è l'ampiezza dell'angolo tra essi compreso ;*

nel nostro caso $sin\,\gamma = 1 \rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$

Essendo il triangolo rettangolo, il terzo lato si calcola applicando il teorema di Pitagora $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

2.Si calcoli, giustificando la risposta, il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$

Risposta $[-1; 2]$

Soluzione

Condizioni di realtà dei radicali quadratici :

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 2 - \sqrt{3 - x} \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 2 \geq \sqrt{3 - x} \\ 1 \geq \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ -1 \leq x \leq 3 \\ 1 \geq 2 - \sqrt{3 - x} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ -1 \leq x \leq 3 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases} \rightarrow \; -1 \leq x \leq 2$$

3. **La retta tangente al grafico di una funzione $f(x)$ in $x = 1$ è $y = 3x + 2$. Quali sono i valori di $f(1)$ e di $f'(1)$? Se in $x = 2$ la retta tangente è $y = -x + 5$, quali sono i valori di $f(2)$ e $f'(2)$?**

Risposta $f(1) = 5$ $f'(1) = 3$ $f(2) = 3$ $f'(2) = -1$

Soluzione

$\mathbf{f(1)}$ e $\mathbf{f(2)}$ corrispondono alle ordinate dei punti di intersezione del grafico di f(x) con le rispettive tangenti

$\mathbf{f'(1)}$ **e** $\mathbf{f'(2)}$ corrispondono ai coefficienti angolari delle rispettive rette tangenti

4. In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Quale è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?

Risposta $\mathbf{\frac{2}{15}}$

Soluzione

La probabilità che il primo estratto non abbia gli occhi azzurri è $\frac{4}{10}$

La probabilità che neanche il secondo li abbia è $\frac{3}{9}$

La probabilità dell'evento intersezione è $\mathbf{\frac{4}{10}\frac{3}{9} = \frac{2}{15}}$

Allo stesso risultato si perviene calcolando la probabilità come rapporto $\frac{casi\ favorevolii}{casi\ possibili}$ =

$$\mathbf{\frac{C_{4,2}}{C_{10,2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}}$$

5. **In un libro si legge*:<<Due valigie della stessa forma sembrano "quasi uguali", quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (o del 20% o del 25%) corrisponde un aumento di capacità (volume) di circa il 33% (oppure 75% o 100%: raddoppio)>>* E ' così? Si motivi esaurientemente la risposta.**

Risposta : Sì, in buona approssimazione

Soluzione

Sia k l'aumento percentuale in una direzione e k_V *l'aumento percentuale del volume*

Questo significa che

- *la lunghezza di un segmento passa dal valore* a_o *al valore* $a_o + \frac{k}{100} a_o = a_o(1 + \frac{k}{100})$
- *il volume di un solido passa dal valore* V_o *al valore* $V_o + \frac{k_V}{100} V_o = V_o(1 + \frac{k_V}{100})$

Un cubo di spigolo a_o *subirà un aumento di volume pari a*

$$a_o{}^3[(1 + \frac{k}{100})^3 - 1] = a_o{}^3[\left(\frac{k}{100}\right)^3 + 3\left(\frac{k}{100}\right)^2 + 3\frac{k}{100}]$$

ovvero un ***aumento percentuale pari a*** $\frac{k^3}{100^2} + 3\frac{k^2}{100} + 3k$

Se k ***è abbastanza piccolo, da poter trascurare i termini di grado 2 e grado 3, si può affermare che l'aumento percentuale di volume è circa il triplo di quello lineare ; in ogni caso*** k_V ***sarà poco maggiore di*** $3k$

Esempio numerico:

Si consideri un cubo di lato unitario, il suo volume è anch'esso unitario.

Se lo spigolo aumenta del 10 % (o del 20% o del 25%), il volume sarà uguale rispettivamente a

$1{,}10^3 \cong 1{,}33$ aumento del 33%

$1{,}20^3 \cong 1{,}73$ aumento del 73%

$1{,}25^3 \cong 1{,}95$ aumento del 95%

Quindi i calcoli confermano, in buona approssimazione, le affermazioni

6. **Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 sono due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la quinta posizione e quello che occupa la 721-esima posizione?**

Risposta : quinta posizione: 1234756. **721-esima posizione:** 2134567

Soluzione

Se ordiniamo in ordine crescente i 5040 numeri della lista, il primo numero è ovviamente **1234567,** cioè quello in cui tutte le cifre sono poste in ordine crescente, l'ultimo sarà **7654321,** cioè quello in cui tutte le cifre sono poste in ordine decrescente.

I primi **6** numeri si ottengono fissando le prime 4 cifre e permutando le ultime 3, essendo **3!=6**; il sesto numero sarà **1234765.**
In quinta posizione c'è il penultimo numero che inizia con 1234, cioè **1234756.**

I primi **720** numeri si ottengono fissando 1 come prima cifra e permutando le altre 6, essendo **6! = 720.**
In 721-sima posizione c'è il primo numero che inizia con la cifra 2: **2134567.**

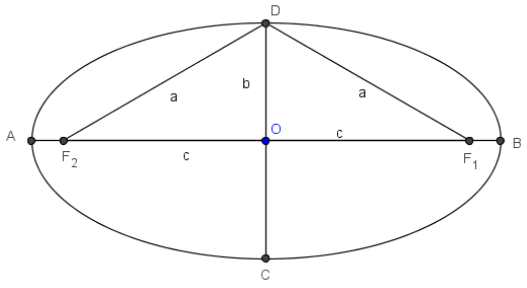
7. Un'ellisse ha semiasse maggiore 2 e semiasse minore 1. Qual è la distanza tra i due fuochi?

Risposta $2\sqrt{3}$

Soluzione

Consideriamo un'ellisse e indichiamo con

- A e B i vertici principali
- C e D i vertici secondari
- F_1 *e* F_2 i due fuochi
- O il centro di simmetria



Indichiamo altresì con a, b e c le lunghezze , rispettivamente del semiasse maggiore, del semiasse minore e della semidistanza focale

Per le proprietà dei punti dell'ellisse $\overline{DF_2} + \overline{DF_1} = 2a$, pertanto $\overline{DF_2} = \overline{DF_1} = a$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo DOF_2(o a DOF_1) si ha $a^2 = b^2 + c^2$ da cui, nel nostro caso,

$$\boldsymbol{c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}}$$

8. Il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione f(x) è, in ogni suo punto P , uguale al prodotto dell'ascissa x di P per la radice cubica di x.
Si determini f(x) sapendo che il suo grafico passa per il punto A(1;1)

Risposta $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} + \frac{4}{7}}$

Soluzione

$f'(x) = x\sqrt[3]{x} \rightarrow \int f'x)\, dx = \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}$ +c

La funzione richiesta è , tra le primitive di $f'(x)$, quella per cui risulta

$$f(1) = 1 \rightarrow \frac{3}{7} + c = 1 \rightarrow c = \frac{4}{7}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} + \frac{4}{7}}$$

9. Si calcoli $\lim_{x\to 0} 4\frac{senxcosx-senx}{x^2}$

Risposta : 0

Soluzione

Si scrive la funzione nella forma $4 \quad \frac{senx}{x} \quad \frac{cosx-1}{x}$

e si sfruttano i due risultati $\begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0} \frac{cosx-1}{x} = 0 \end{cases}$

dove il primo è un limite notevole e il secondo si può determinare applicando semplici identità trigonometriche

$\lim_{x\to 0} \quad \frac{cosx-1}{x} =$ $= \lim_{x\to 0} \quad \frac{-(\operatorname{sen} x)^2}{x(\cos x+1)} = -1 * \frac{0}{2}$=0 *Identità fondamentale* $sen^2x + cos^2x = 1$	$\lim_{x\to 0} - \quad 2\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{x}{2}}$ =0 *Formula di bisezione* $2sen^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$

10. Sia f$(x) = ln\,(ln(1-x))$ si calcoli la derivata $f'(x)$

Risposta-Soluzione

$la\ funzione\ f(x) è\ definita\ in\ ]-\infty;0[$ ed è ivi derivabile $essendo\ funzione\ composta\ di\ funzioni\ derivabii$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)\ln(1-x)}$$