Soluzione della prova di Matematica di ordinamento

Anno Scolastico 2012 – 2013

Prof. Ing. Luigi Verolino

Università Federico II di Napoli

Dipartimento di Ingegneria Elettrica e Tecnologie dell'Informazione

Via Claudio 21 [80125] Napoli

verolino@unina.it

[Foto del prof. Giuseppe Russo del Liceo Calamandrei di Napoli]

PROBLEMA 1

La funzione f è definita da $f(x)=\int_0^x\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt$ per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso $[0,9]$.

1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$ ove f' indica la derivata di f.
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x, $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.
3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0,2\pi]$.
4. Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0\le x\le 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x, area $A(x)=3\,sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)$. Si calcoli il volume di W.

• *Punto 1*

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, è chiaro che

$$f'(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}.$$

Eseguendo poi l'integrazione elementare, si può determinare la funzione $f(x)$

$$f(x)=\int_0^x\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt=\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{t}{2}\right]_0^x=2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}.$$

Si ottiene allora

$$f'(\pi)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad f'(2\pi)=\cos(\pi)+\frac{1}{2}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Altri valori, utili per disegnare la funzione $f'(x)$, sono riportati in tabella.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π

$f'(x)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

• *Punto 2*

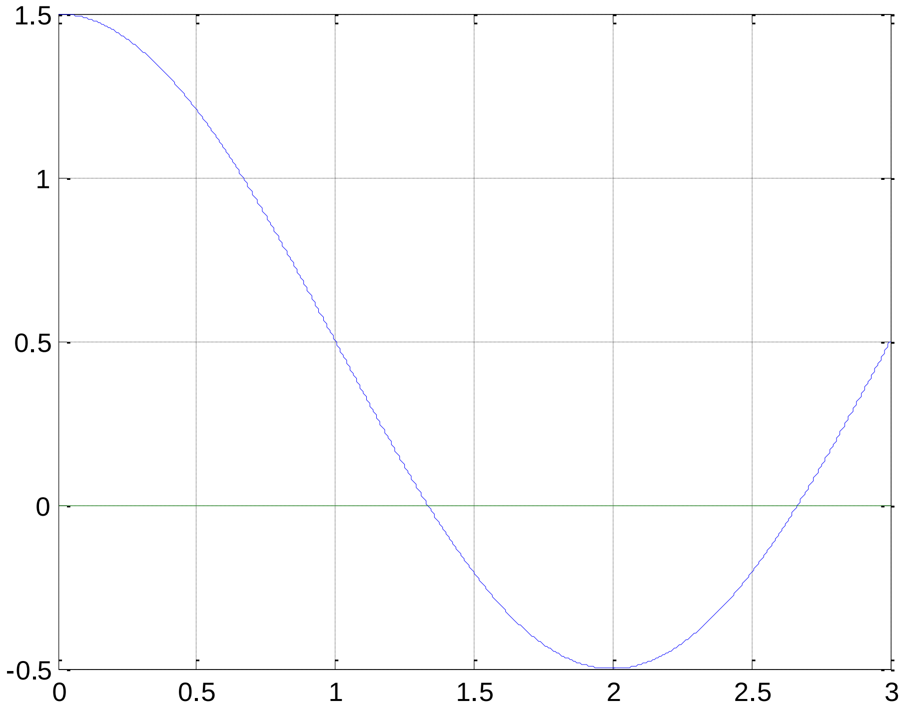
Si noti che le intersezioni con l'asse x della funzione $f'(x)$ valgono

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{4}{3}\pi\,, \;\; x_2 = \frac{8}{3}\pi\,.$$

Studiando il segno della seconda derivata

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) > 0\,, \quad \text{per} \quad 2\pi < x < 4\pi\,,$$

si deduce che la funzione $f'(x)$ presenta un minimo relativo nel punto $x = 2\pi$. Queste considerazioni e la tabella precedentemente riportata giustificano il grafico che segue.



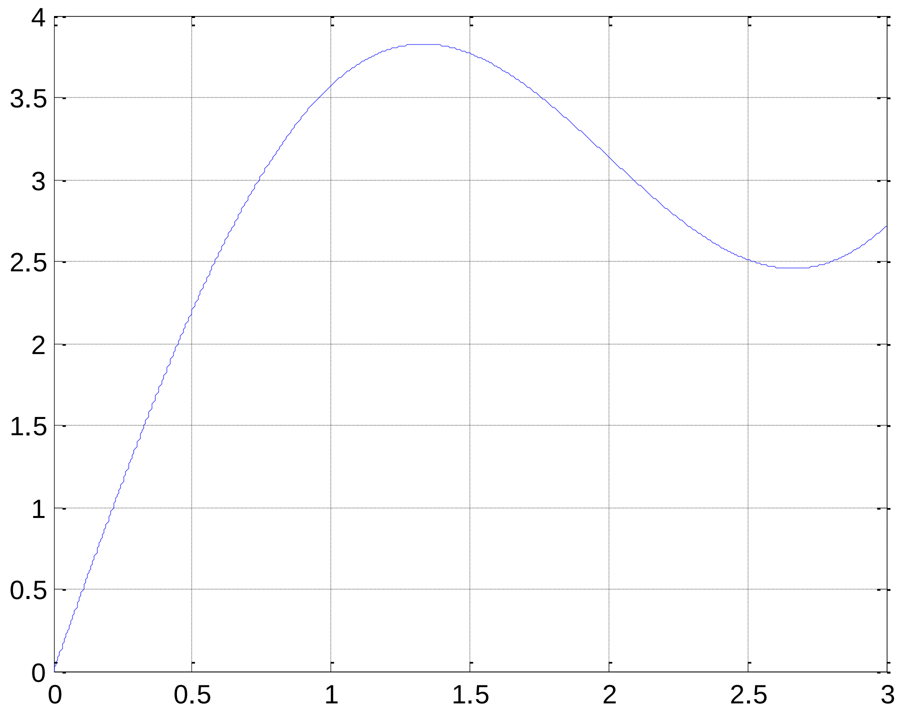
Per comodità e chiarezza di rappresentazione, la figura precedente mostra il grafico Σ in funzione della *ascissa normalizzata* x/π, che è stata spinta fino a 3, un po' oltre il limite di $9/\pi$ imposto dal testo. Sempre da questo grafico si evince che la funzione $f(x)$ risulta strettamente crescente nei due intervalli

$$0 < x < \frac{4\pi}{3}\,, \quad \frac{8}{3}\pi < x < 3\pi\,,$$

mostrando un massimo ed un minimo relativo, rispettivamente, nei punti

$$M\left(\frac{4}{3}\pi;\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}\right)\,, \quad m\left(\frac{8}{3}\pi;\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right),$$

entrambi con ordinate positive. Elementari considerazioni consentono di ottenere l'andamento della funzione $f(x)$ mostrato nella figura che segue, sempre in funzione della *ascissa normalizzata* x/π e sempre nell'intervallo [0; 3].



• *Punto 3*

Si può scrivere che il richiesto valor medio vale

$$f'(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)\,dx = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi - 0} = \frac{1}{2}\,.$$

• *Punto 4*

Dal momento che

$$A(x) = 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right) \geq 0\,, \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 4\,,$$

il volume richiesto V_W si può esprimere per mezzo della sovrapposizione di tante piccole 'fettine', aventi volumi elementari $dV_W = A(x)dx$, sicché

$$V_W = 3\int_0^4 \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx = \frac{12}{\pi}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_0^4 = \frac{24}{\pi}\,.$$

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x)=\frac{8}{4+x^2}$

1. Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy. Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti $P(-2;1)$ e $Q(2;1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ. Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.
2. Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro $(0;1)$. Una retta t, per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta d'equazione $y=2$ in un punto B. Si provi che, qualunque sia t, l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate $(x;y)$ di un punto di Φ.
3. Si consideri la regione R compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo $[0,2]$. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da Γ e si provi altresì che la regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il cerchio.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse y, genera il solido W. Si scriva, spiegandone il perchè, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W.

•*Punto 1*

La funzione assegnata, peraltro definita e continua per ogni valore di x,

$$f(x)=\frac{8}{4+x^2}$$

rappresenta una ben nota curva, detta *versiera*, già presente in altri esami di stato (PNI 2003) ed attribuita alla matematica milanese Maria Gaetana Agnesi, che la descrisse verso la metà del Settecento. Il nome deriva dal latino ed indica la corda legata all'estremità di una vela, utilizzata per le virate.

Si tratta di una funzione pari $[f(-x)=f(x)]$, vale a dire che il grafico è simmetrico rispetto all'asse y, e sempre positiva $[f(x)>0]$. L'asse x è asintoto orizzontale, dato che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0\,.$$

Passando allo studio delle derivate, si può dire che la funzione è strettamente crescente per $x<0$, esibendo un massimo nel punto $M(0;2)$, essendo

$$f'(x) = -\frac{16x}{(4+x^2)^2} > 0\,, \quad \text{per} \quad x < 0\,.$$

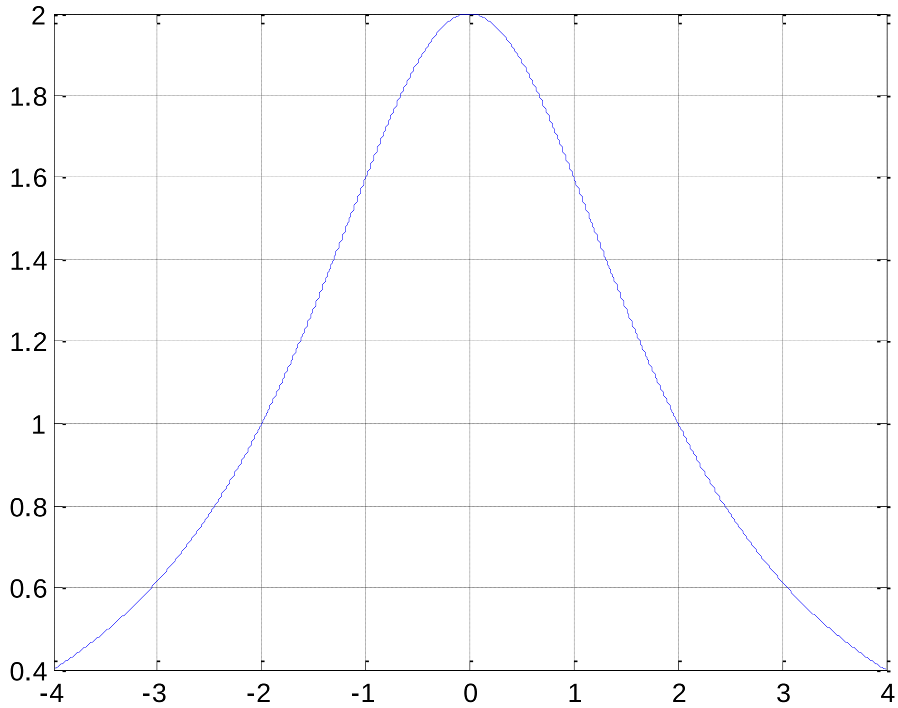
Inoltre, poiché

$$f''(x) = -16\,\frac{(4+x^2)^2 - 4x^2(4+x^2)}{(4+x^2)^4} = 16\,\frac{3x^2-4}{(4+x^2)^3}\,,$$

è concava verso l'alto per $|x| > 2/\sqrt{3}$, mostrando due flessi, rispettivamente ascendente e discendente, nei punti

$$F_1\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{3}{2}\right)\,,\quad F_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{3}{2}\right)\,.$$

Le precedenti considerazioni giustificano il grafico Φ che segue.



Considerato allora il punto $P(-2;1)$, risulta $f'(-2) = 1/2$ e la tangente alla curva passante per P vale

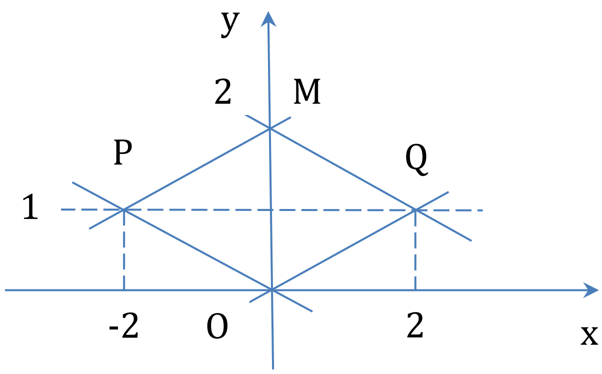
$$y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{x}{2} + 2\,.$$

Similmente, considerato il punto $Q(2;1)$, risulta $f'(2) = -1/2$ e la tangente alla curva passante per Q vale

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{x}{2} + 2\,.$$

Ebbene, queste due tangenti si intersecano proprio nel punto di massimo della funzione, essendo

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} + 2\,, \\ y = -\dfrac{x}{2} + 2\,, \end{cases} \quad \rightarrow \quad M(0;2)\,.$$



Ora, dato che un rombo, anche detto losanga, è un quadrilatero che ha tutti i lati della stessa lunghezza, si conclude rapidamente che $OPMQ$ è un rombo di lato

$$\overline{OP} = \overline{PM} = \overline{MQ} = \overline{QO} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \, ,$$

e di angoli, a due a due uguali, pari a

$$P\widehat{M}Q = Q\widehat{O}M = 2 \tan^{-1} 2 \cong 126° \, 52' \, 12'' \, ,$$
$$M\widehat{Q}O = M\widehat{P}O = 180° - P\widehat{M}Q = \; 53° \, 7' \, 48'' \, .$$

Si rammenta che il *grado sessagesimale* è la trecentosessantesima parte di un angolo giro; la sessantesima parte di un grado è detta *primo*; la sessantesima parte di un primo è detta *secondo*.

• *Punto 2*

L'equazione della circonferenza Γ, con cento in $C(0; 1)$ e raggio unitario, è

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2y = 0 \, ,$$

per cui essa interseca la generica retta passante per l'origine nel punto

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \, , \\ y = Mx \, , \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + M^2x^2 - 2Mx = 0 \, , \\ y = Mx \, , \end{cases} \quad \rightarrow \quad A\left(\frac{2M}{1+M^2}; \frac{2M^2}{1+M^2}\right).$$

Similmente, la retta di equazione $y = 2$ interseca la generica tangente per l'origine nel punto

$$\begin{cases} y = 2 \, , \\ y = Mx \, , \end{cases} \quad \rightarrow \quad B\left(\frac{2}{M}; 2\right)$$

Adesso, per verificare che

$$y_A = \frac{8}{4 + x_B^2} ,$$

basta eliminare il parametro $M = 2/x_B$ dalle due relazioni

$$y_A = \frac{2M^2}{1 + M^2} , \quad x_B = \frac{2}{M} .$$

• *Punto 3*

Detta $S_\Gamma = \pi$ l'area racchiusa da Γ, risulta che S_R, l'area della regione R, vale

$$S_R = \int_0^2 \frac{8}{4 + x^2} dx = 4 \int_0^1 \frac{1}{1 + u^2} du = 4 \left[\tan^{-1}(u)\right]_0^1 = 4 \tan^{-1}(1) = \pi = S_\Gamma .$$

Inoltre, si può scrivere per il calcolo dell'area sottesa lungo tutto l'asse x

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{8}{4 + x^2} dx = 8 \lim_{T\to\infty} \tan^{-1}(T) = 8 \frac{\pi}{2} = 4\pi = 4S_\Gamma .$$

• *Punto 4*

La regione R, nel suo ruotare attorno all'asse y, descrive un cilindro, sormontato da una superficie a forma di cupola. Il volume V_C del cilindro vale

$$V_C = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = 4\pi ,$$

mentre il volume sovrastante V_S, prendendo la funzione inversa $g(y)$ della versiera

$$y(4 + x^2) = 8 \quad \to \quad x^2 = \frac{8}{y} - 4 \quad \to \quad x = g(y) = \sqrt{\frac{8}{y} - 4} \quad \text{per} \quad x \geq 0 ,$$

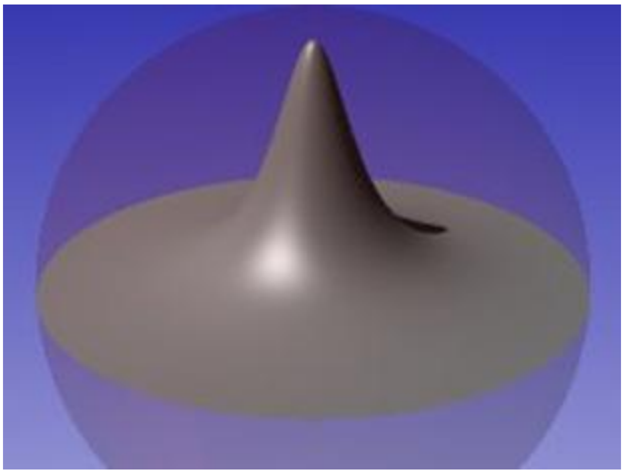
è pari a

$$V_S = \pi \int_1^2 g^2(y)\, dy = 4\pi \int_1^2 \left(\frac{2}{y} - 1\right) dy = 4\pi\ [2\ln|y| - y]_1^2 = 4\pi(\ln 4 - 1)\ .$$

In definitiva, il volume totale V_T risulta

$$V_T = V_C + V_S = 4\pi + 4\pi(\ln 4 - 1) = 4\pi \ln 4 = 8\pi \ln 2 \cong 17.42\ .$$

Prima di concludere l'esercizio, è interessante riportare una curiosità, ripresa dal *Progetto Polymath*. Il traduttore inglese del libro della Agnesi confuse *la versiera* con il termine *avversiera*, che significa *strega* e chiamò la curva come *witch of Agnesi* (strega di Agnesi), un nome con cui essa è conosciuta in numerose lingue. Paradossalmente, se si fa ruotare, come richiesto dal problema, una versiera attorno all'asse y, si ottiene proprio la forma del classico cappello da strega.



QUESTIONARIO

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

2. Si calcoli il dominio della funzione

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}}$$

3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2;-1)$ e $B(-6;-8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A.

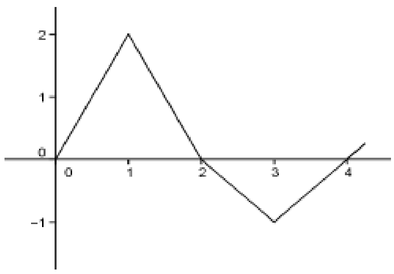
4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a, b e h, illustrando il ragionamento seguito.

5. In un libro si legge: "*Due valigie della stessa forma sembrano "quasi uguali", quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100% : raddoppio)*". È così? Si motivi esaurientemente la risposta.

6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7!=5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione?

7. Un foglio rettangolare, di dimensioni a e b, ha area $1\,m^2$ e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di a e b?

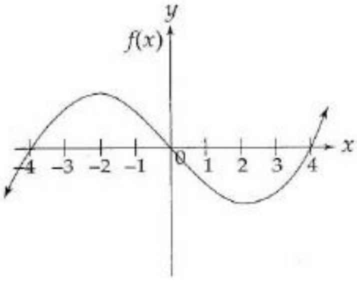
8. La funzione f ha il grafico in figura. Se $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, per quale valore positivo di x, g ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.

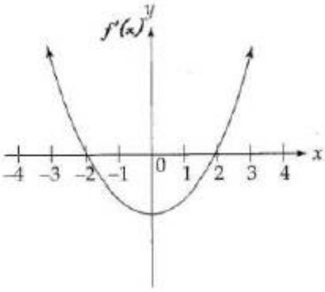


9. Si calcoli:

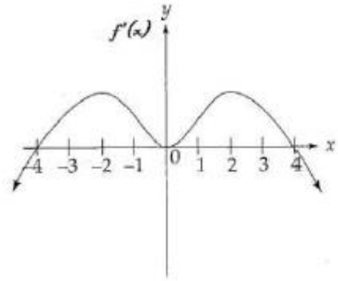
$$\lim_{x\to 0} 4\,\frac{senx\cos x - senx}{x^2}$$

10. Se la figura a lato rappresenta il grafico di $f(x)$, quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si giustifichi la risposta.

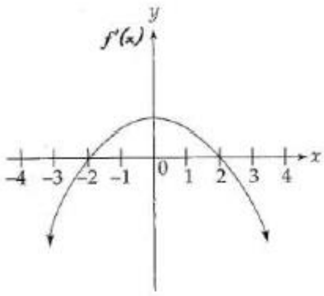




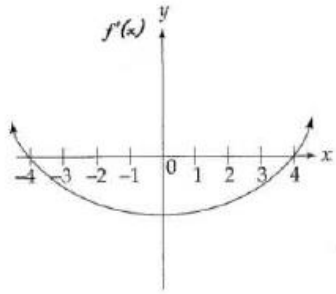
A)



C)

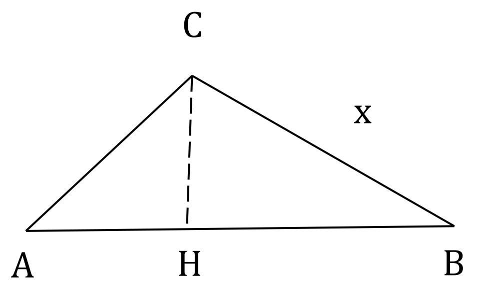


B)



D)

QUESITO 1



Detta $S = 3$ l'area del triangolo ABC di base $\overline{AB} = 3$, l'altezza relativa a questa base vale

$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} \quad \rightarrow \quad \overline{CH} = \frac{2 \cdot S}{\overline{AB}} = \frac{6}{3} = 2 \, .$$

Ora, essendo anche $\overline{CA} = 2$, si conclude che $\overline{AH} = 0$, vale a dire che il triangolo ABC è rettangolo, ed il terzo lato vale

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 \quad \rightarrow \quad \overline{BC} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \, .$$

Alternativamente, usando la formula di Erone (matematico alessandrino del primo secolo dopo Cristo), detto $\overline{BC} = x > 0$ il lato incognito del triangolo e p il semiperimetro, cioè $2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 3 + 2 + x = 5 + x$, si ha che

$$S^2 = p\left(p - \overline{AB}\right)\left(p - \overline{BC}\right)\left(p - \overline{CA}\right) = 3^2 \, .$$

Sviluppando i calcoli, si verifica comodamente che la precedente uguaglianza si trasforma nell'equazione che segue

$$\frac{5+x}{2}\left(\frac{5+x}{2}-3\right)\left(\frac{5+x}{2}-2\right)\left(\frac{5+x}{2}-x\right)=9 \quad \rightarrow \quad (x^2-1)(25-x^2)=144\,.$$

In definitiva, si ottiene l'equazione biquadratica di quarto grado

$$x^4-26x^2+169=0\,,$$

che può essere riscritta, trattandosi di un quadrato perfetto, nella forma equivalente

$$(x^2-13)^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2=13 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt{13}\,,$$

avendo scartato la radice negativa, dato che la lunghezza di un segmento è sempre maggiore di zero.

QUESITO 2

Sia

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}}$$

la funzione di cui si desidera determinare il *dominio*. Anzitutto, per l'esistenza della radice più interna, deve risultare

$$3-x\geq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x\leq 3}\,.$$

Similmente, bisogna richiedere che

$$2-\sqrt{3-x}\geq 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{3-x}\leq 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{-1\leq x\leq 3}\,.$$

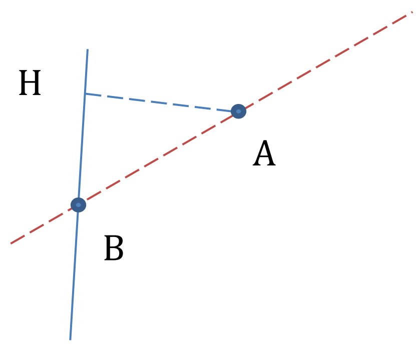
Infine, deve risultare che

$$1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}\geq 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2-\sqrt{3-x}}\leq 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{-1\leq x\leq 2}\,.$$

In definitiva, considerando la soluzione comune alle tre precedenti, si può concludere che il *dominio* della funzione vale

$$\boxed{-1\leq x\leq 2}\,.$$

QUESITO 3



Dato che la generica retta passante per B è esprimibile come

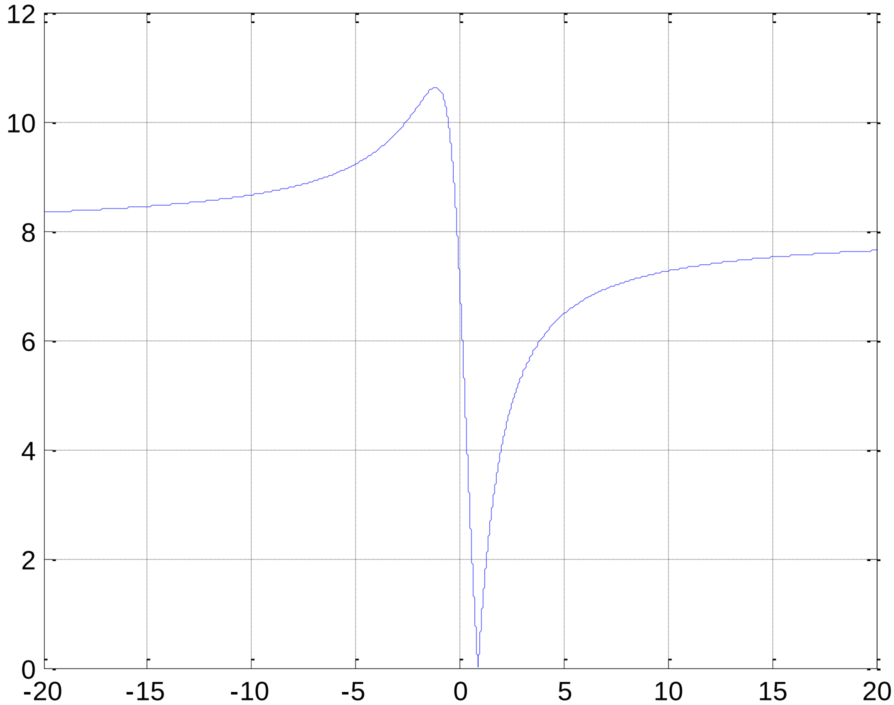
$$y+8=M(x+6) \quad \rightarrow \quad Mx-y+6M-8=0\,,$$

si può dire che la distanza tra il punto A e questa retta $\overline{AH}=d(M)$ dipende dal coefficiente angolare della retta generica, secondo la ben nota formula

$$d(M) = \frac{|2M + 1 + 6M - 8|}{\sqrt{1 + M^2}} = \frac{|8M - 7|}{\sqrt{1 + M^2}} = \begin{cases} \dfrac{8M - 7}{\sqrt{1 + M^2}}\,, & M \geq \dfrac{7}{8}\,, \\ \dfrac{7 - 8M}{\sqrt{1 + M^2}}\,, & M \leq \dfrac{7}{8}\,. \end{cases}$$

Si verifica facilmente, come suggerisce il grafico precedente, che la distanza assume il valore massimo per

$$M_0 = -\frac{8}{7}\,,\ \ d_{MAX} = \sqrt{113} = \overline{AB} = \sqrt{(-6 - 2)^2 + (-8 + 1)^2} \cong 10.63\,.$$



Il coefficiente angolare M_0 corrisponde a quello della perpendicolare alla retta passante per A e B, che ha pendenza

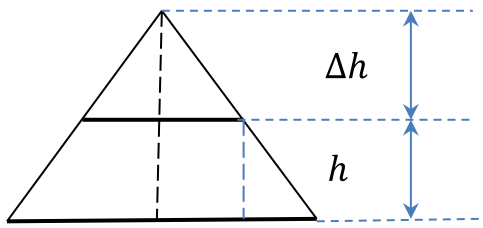
$$M_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7}{8}\,.$$

In conclusione, ogni retta per B che non sia perpendicolare alla retta che congiunge A con B dista meno della distanza $\overline{AB}$ e la retta per B di massima distanza da A è proprio la perpendicolare per B alla retta $A - B$.

QUESITO 4

Il volume del tronco di piramide si ottiene per differenza da quello della piramide. Sfruttando la similitudine tra triangoli, non è difficile scrivere, con riferimento alla figura che segue, che

$$\Delta h = h \frac{b}{a-b} .$$



Pertanto, il volume del tronco di piramide V_T di altezza h vale

$$V_T = \frac{a^2(h+\Delta h)}{3} - \frac{b^2 \Delta h}{3} = \frac{a^2 h}{3} + \frac{\Delta h}{3}(a^2 - b^2) =$$
$$= \frac{a^2 h}{3} + \frac{h}{3}\frac{b}{a-b}(a-b)(a+b) = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab) .$$

In generale, indicando con A l'area della base maggiore, con B quella della minore, si potrebbe dimostrare che il volume di un tronco di piramide a base rettangolare è pari a

$$V_T = \frac{h}{3}\left(A + B + \sqrt{AB}\right) .$$

QUESITO 5

Si ponga $V = abc$ il volume iniziale della valigia, assimilata ad un parallelepipedo rettangolare. Dopo l'incremento, si può scrivere

$$V + \Delta V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c)\,.$$

Sviluppando i prodotti, risulta

$$V + \Delta V = abc + cb\Delta a + ca\Delta b + ab\Delta c + c\Delta a\Delta b + b\Delta a\Delta c + a\Delta b\Delta c + \Delta a\Delta b\Delta c\,,$$

ovvero, introducendo il rapporto tra il volume finale e quello iniziale, riesce

$$r = \frac{V + \Delta V}{V} = 1 + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta a}{a}\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a}\frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta b}{b}\frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta a}{a}\frac{\Delta b}{b}\frac{\Delta c}{c}\,.$$

Se ora si immagina che i tre incrementi relativi lineari siano uguali, vale a dire

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta c}{c} = \alpha\,,$$

il tasso di crescita si semplifica come

$$r = 1 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3 = (1 + \alpha)^3 \quad \to \quad \frac{\Delta V}{V} = 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3\,.$$

Dalla relazione trovata si evince la tesi proposta nel quesito e, nella tabella che segue, viene calcolato il tasso di crescita nelle tre situazioni proposte.

α	0.10	0.20	0.30
$\Delta V/V$	0.331	0.728	1.197

Vale la pena notare, concludendo, che la legge della termologia relativa alla dilatazione cubica dei solidi si possa ottenere come caso particolare dall'equazione ottenuta, nell'ipotesi che α sia piccola, sicché si può scrivere

$$\frac{\Delta V}{V} \cong 3\alpha\,, \quad \text{solo se} \quad \alpha \to 0\,.$$

QUESITO 6

Si immagini di dividere in *sette gruppi*, ciascuno costituito da $6! = 720$ elementi, l'insieme delle permutazioni (semplici) delle sette cifre ($7! = 7 \cdot 6!$). Il primo gruppo è costituito da tutti i numeri che hanno come prima cifra il numero 1, il secondo gruppo è formato da tutti i numeri che hanno come prima cifra il numero 2, e così via. Questa partizione costituisce un primo naturale ordinamento crescente dell'insieme e consente di affermare che i primi sette numeri dell'insieme sono

$$\mathbf{1234}567 - \mathbf{1234}576 - \mathbf{1234}657 - \mathbf{1234}675 - \mathbf{1234}756 - \mathbf{1234}765 - \mathbf{1235}467\,,$$

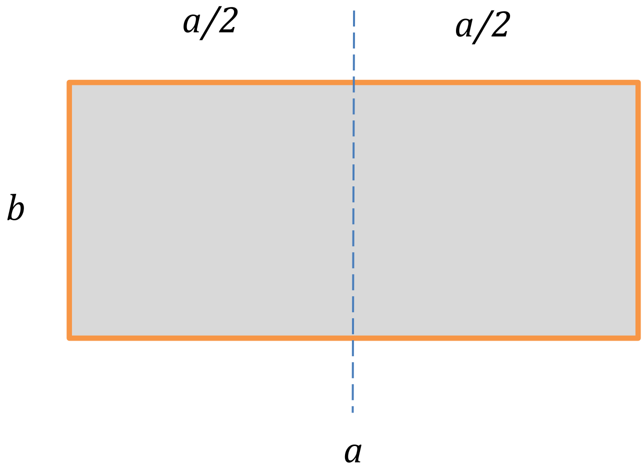
mentre l'elemento 721, cioè il più piccolo tra quelli che iniziano per 2, è

$$2134567\,.$$

QUESITO 7

Immaginando di rappresentare tutte le grandezze, supposte positive, in metri, si può scrivere la proporzione

$$a : b = b : \frac{a}{2} \quad \to \quad b^2 = \frac{a^2}{2} \quad \to \quad b = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

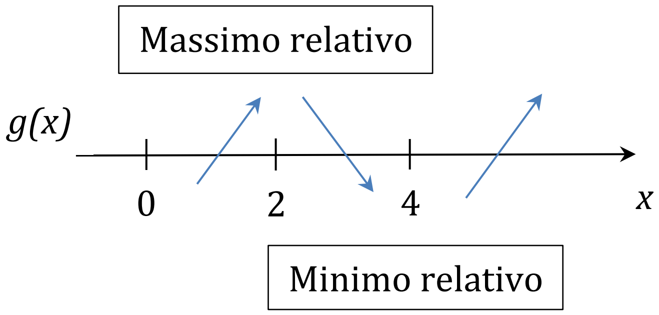


Risulta, dunque, il sistema che segue

$$\begin{cases} ab = 1\,, \\ a = b\sqrt{2}\,, \end{cases} \quad \rightarrow \quad a = \sqrt[4]{2}\,, \;\; b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\,.$$

QUESITO 8

Dalla figura assegnata, opportunamente trasformata in grafico per la crescenza della funzione $g(x)$, risulta un minimo relativo per $x = 4$.



La funzione $g(x)$ si può ottenere integrando tratto dopo tratto la $f(x)$, in modo tale che, posto

$$f(x) = g'(x) = \begin{cases} 2x\,, & 0 \le x \le 1\,, \\ 4 - 2x\,, & 1 \le x \le 2\,, \\ 2 - x\,, & 2 \le x \le 3\,, \\ x - 4\,, & 3 \le x \le 4\,, \end{cases}$$

si possa scrivere

$$g(x) = \begin{cases} x^2\,, & 0 \le x \le 1\,, \\ -x^2 + 4x - 2\,, & 1 \le x \le 2\,, \\ -\dfrac{x^2}{2} + 2x\,, & 2 \le x \le 3\,, \\ \dfrac{x^2}{2} - 4x + 9\,, & x \ge 3\,. \end{cases}$$

QUESITO 9

Ricordando i limiti fondamentali, risulta immediatamente

$$\lim_{x\to 0} 4\,\frac{\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{0}{0} = -4 \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}}_{1/2} = 0\,.$$

QUESITO 10

La risposta esatta è la A, dal momento che:

- $f(x)$ ha due estremi relativi in $x = \pm 2$ e quindi $f'(\pm 2) = 0$, per cui le risposte C e D sono false;
- $f(x)$ decresce nell'intervallo $|x| < 2$, laddove è $f'(x) < 0$, per cui la risposta B è falsa.