Soluzione della prova di Matematica PNI

Anno Scolastico 2012 – 2013

Prof. Ing. Luigi Verolino

Università Federico II di Napoli

Dipartimento di Ingegneria Elettrica e Tecnologie dell'Informazione

Via Claudio 21 [80125] Napoli

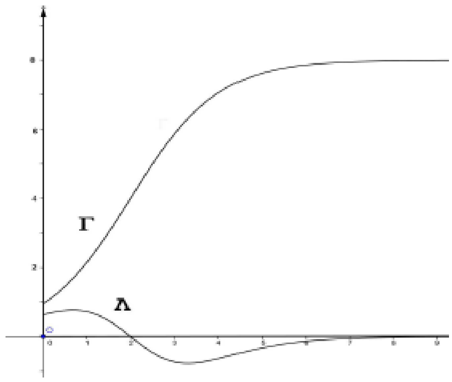
verolino@unina.it

[Foto del prof. Giuseppe Russo del Liceo Calamandrei di Napoli]

PROBLEMA 1

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0,+\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2;4)$, passa per $(0;0)$, mentre le rette $y=8$ e $y=0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ, rispettivamente.

1) Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è: $f''(x) \le f'(x) \le f(x)$, qual è un possibile andamento di $f'(x)$?



2) Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?

3) Se Γ è il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{a}{1+e^{b-x}}$, si provi che $a=8$ e $b=2$.

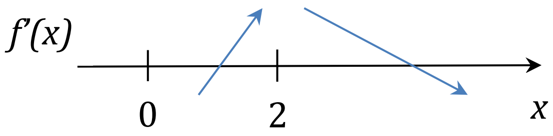
4) Nell'ipotesi del punto 3), si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0,2]$.

• *Punto 1*

Si sa che $f'(x) > 0$, dato che $f(x)$ è strettamente crescente per $x > 0$. Inoltre, dato che $f(x)$ ha un asintoto orizzontale, si può dire che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 8 \quad \to \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0\,.$$

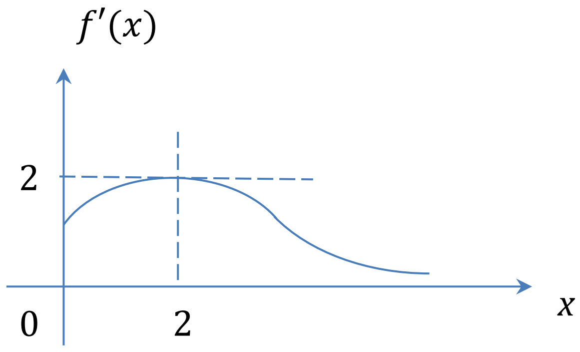
Massimo relativo



Dal grafico della crescenza di $f'(x)$, che si può dedurre osservando l'andamento della seconda derivata, segue che essa presenta un massimo relativo per

$$x = 2\,, \quad f'(2) = \frac{4}{2} = 2\,.$$

Le precedenti considerazioni giustificano il grafico che segue.



• *Punto 2*

La popolazione $f(x)$ cresce in ogni istante di tempo x. In particolare, il flesso discendente in $x = 2$ indica che il tasso di crescita della popolazione diminuisce per $x > 2$, fino ad azzerarsi completamente all'infinito.

• *Punto 3*

Dal momento che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a = 8\,,$$

segue che la generica funzione assegnata si specifica come

$$f(x) = \frac{8}{1 + \mathrm{e}^{b-x}}\,.$$

Ora, dato che $f(2) = 4$, si può scrivere

$$4 = \frac{8}{1+\mathrm{e}^{b-2}} \quad \rightarrow \quad 1+\mathrm{e}^{b-2} = 2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{e}^{b-2} = 1 \quad \rightarrow \quad b = 2\,.$$

• *Punto 4*

In forza del teorema fondamentale di Torricelli, risulta

$$\int_0^2 f''(x)dx = f'(2) - f'(0) = 2 - \frac{8\mathrm{e}^2}{(1+\mathrm{e}^2)^2} \cong 1.16\,,$$

laddove si è fatto uso della prima derivata

$$f'(x) = \frac{8\mathrm{e}^{2-x}}{(1+\mathrm{e}^{2-x})^2} \quad \rightarrow \quad f'(2) = \frac{8}{4} = 2\,,\;\; f'(0) = \frac{8\mathrm{e}^2}{(1+\mathrm{e}^2)^2}\,.$$

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita per tutti gli x positivi da $f(x) = x^3 \ln x$.

1. Si studi f e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.
2. Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x. Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine e tangente a γ in P.
3. Sia R la regione delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra $]0,1]$. Si calcoli l'area di R, illustrando il ragionamento seguito, e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 *decimetro*.
4. Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta $y = -1$.

• *Punto 1*

La funzione $f(x) = x^3 \ln x$ esiste per $x > 0$ e non presenta alcun asintoto verticale, dal momento che

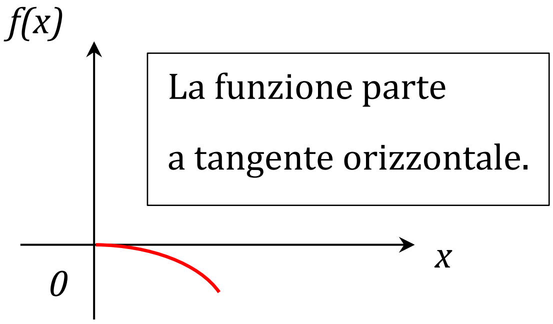
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \cdot (-\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-3}} = \frac{-\infty}{+\infty} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{3x^{-4}} = 0\,.$$

Non presenta asintoti orizzontali oppure obliqui, essendo divergenti i due limiti

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\,.$$

Per il segno della funzione basta osservare che

$$f(x) > 0 \quad \to \quad \ln x > 0 \quad \to \quad x > 1\,.$$



Dato che la prima derivata vale

$$f'(x) = x^2(3\ln x + 1)\,,$$

si può dire che la funzione parte da zero con tangente orizzontale, dato che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\ln x + 1}{x^{-2}} = \frac{-\infty}{+\infty} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{3x^{-1}}{2x^{-3}} = 0\,,$$

e che è strettamente crescente nell'intervallo

$$f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad 3\ln x + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}} \cong 0.717\,,$$

mostrando un *minimo relativo* nel punto

$$m\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}; -\frac{1}{3\mathrm{e}}\right).$$

La seconda derivata

$$f''(x) = x(6\ln x + 5)$$

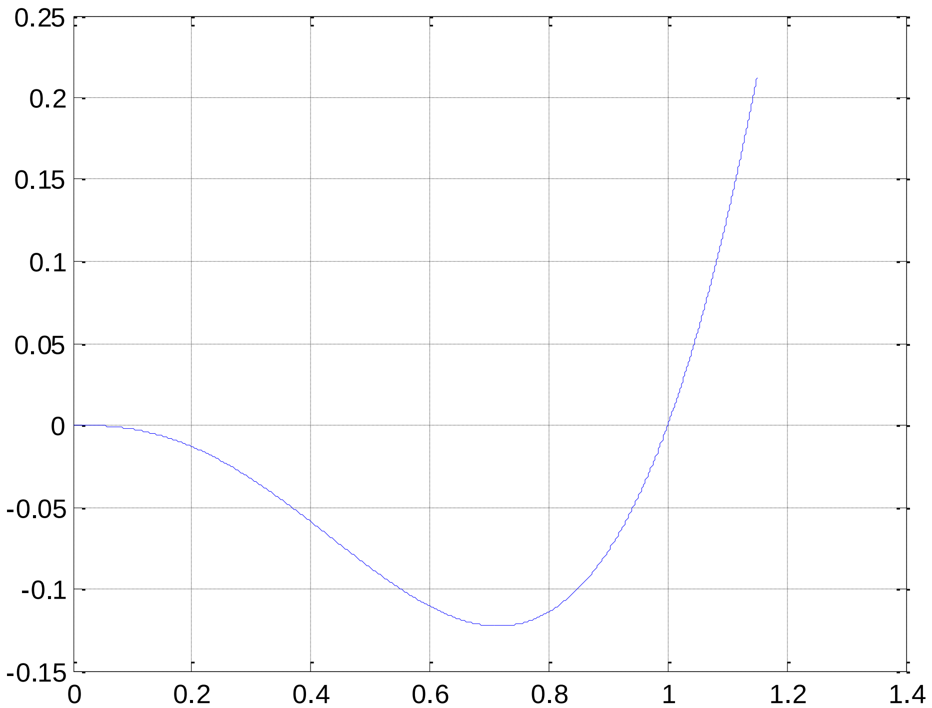
consente di affermare che la funzione è concava verso l'alto per

$$6 \ln x + 5 > 0 \quad \rightarrow \quad x > \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}} \cong 0.435 \,,$$

avendo un flesso ascendente nel punto

$$F\left(\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}; -\frac{5}{6e^2\sqrt{e}}\right).$$

Le precedenti considerazioni giustificano il grafico che segue.



• *Punto 2*

Indicata con

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

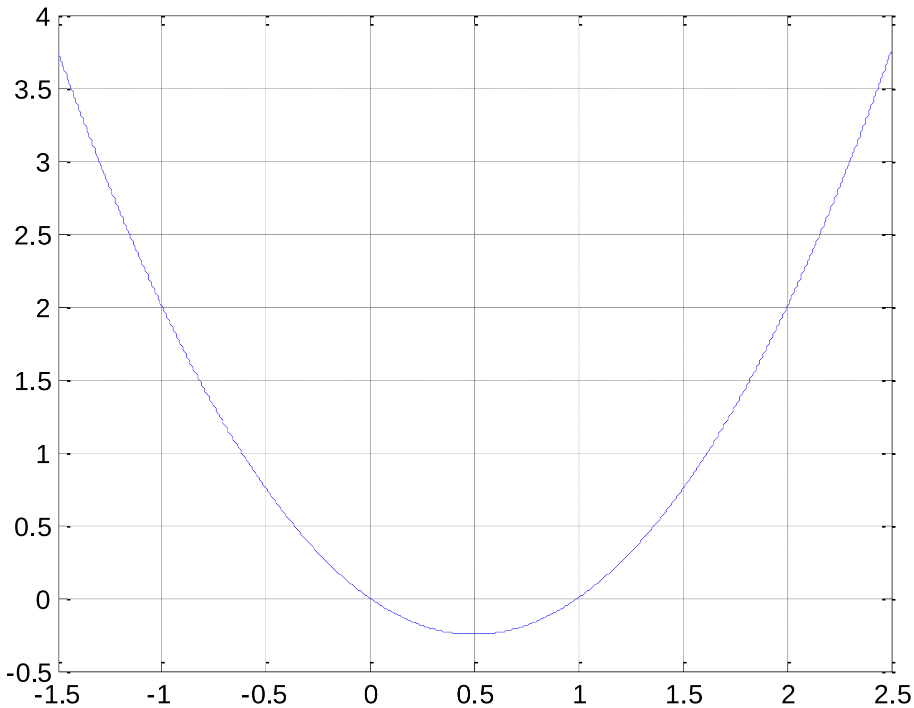
l'equazione della generica parabola ad asse verticale, devono verificarsi le condizioni che seguono:

- ✓ passaggio per l'origine → $C = 0$,
- ✓ passaggio per il punto $P(1;0)$ → $A + B = 0$,
- ✓ comune tangente in P → $f'(1) = 1 = 2A + B$.

Segue che l'equazione della parabola richiesta è

$$y = x^2 - x \,.$$

Essa ha la concavità rivolta verso l'alto e vertice nel punto $V(0.5; -0.25)$.



• *Punto 3*

Nella regione R la funzione è negativa e nulla agli estremi, per cui, per determinarne l'area A_R, bisogna scrivere ($1\ dm = 100\ mm$)

$$A_R = -\int_0^1 x^3 \ln x\, dx = \frac{1}{16}\ dm^2 = \frac{1}{16} \cdot 10^4\ mm^2 = 625\ mm^2\ ,$$

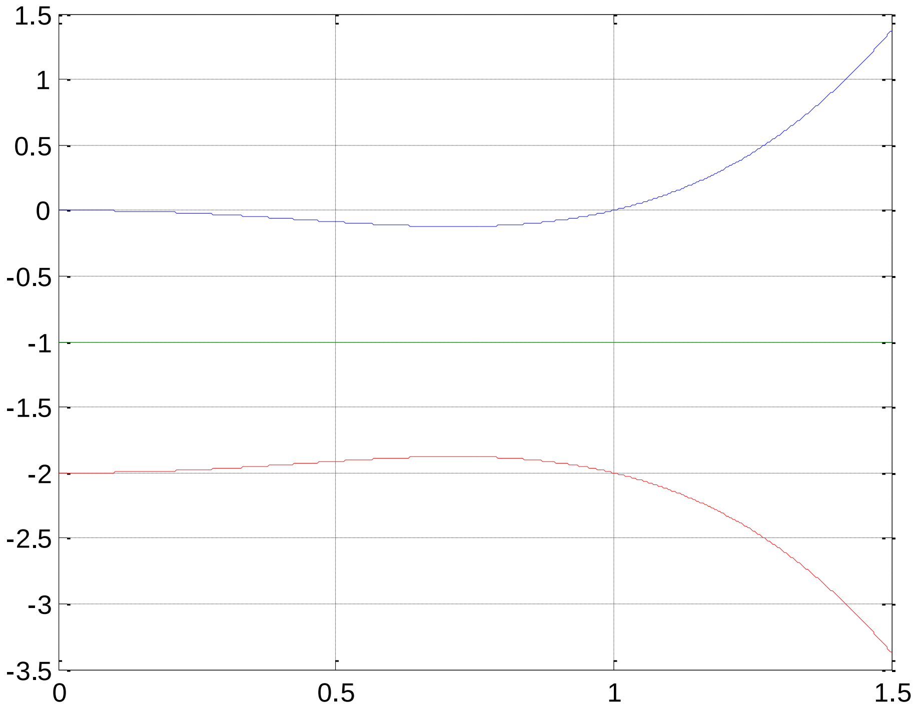
in forza dell'integrale indefinito, ottenibile per parti,

$$\int x^3 \ln x\, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + \text{costante}\ .$$

• *Punto 4*

L'equazione della curva simmetrica rispetto alla retta $y = -1$ è

$$g(x) = -2 - x^3 \ln x\ .$$

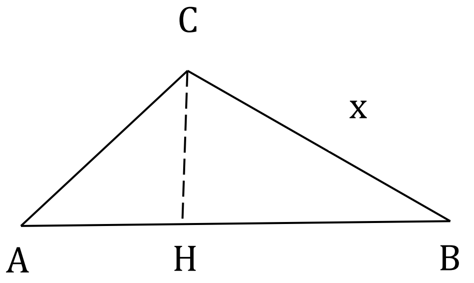


Nella figura riportata la funzione $f(x)$ è in blu, la funzione $g(x)$ in rosso, la retta $y=-1$ in verde.

QUESTIONARIO

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.
2. Se la funzione $f(x)-f(2x)$ ha derivata 5 in $x=1$ e derivata 7 in $x=2$, qual è la derivata di $f(x)-f(4x)$ in $x=1$?
3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2;-1)$ e $B(-6;-8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A.
4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a, b e h, illustrando il ragionamento seguito.
5. In un libro si legge: *"se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento della temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (p.es. 0,38%), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell'1,14%), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè di 0,76%)"*. È così? Si motivi esaurientemente la risposta.
6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7!=5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione?
7. In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Quale è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?
8. Si mostri, senza utilizzare il teorema di *l'Hôpital*, che:
$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\operatorname{sen}x}-e^{\operatorname{sen}\pi}}{x-\pi}=-1$$
9. Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.
10. Si stabilisca per quali valori $k\in R$ l'equazione $x^2(3-x)=k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo $[0,3]$. Posto $k=3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.

QUESITO 1



Detta $S = 3$ l'area del triangolo ABC di base $\overline{AB} = 3$, l'altezza relativa a questa base vale

$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} \quad \rightarrow \quad \overline{CH} = \frac{2 \cdot S}{\overline{AB}} = \frac{6}{3} = 2\,.$$

Ora, essendo anche $\overline{CA} = 2$, si conclude che $\overline{AH} = 0$, vale a dire che il triangolo ABC è rettangolo, ed il terzo lato vale

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 \quad \rightarrow \quad \overline{BC} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}\,.$$

Alternativamente, usando la formula di Erone (matematico alessandrino del primo secolo dopo Cristo), detto $\overline{BC} = x > 0$ il lato incognito del triangolo e p il semiperimetro, cioè $2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 3 + 2 + x = 5 + x$, si ha che

$$S^2 = p\left(p - \overline{AB}\right)\left(p - \overline{BC}\right)\left(p - \overline{CA}\right) = 3^2\,.$$

Sviluppando i calcoli, si verifica comodamente che la precedente uguaglianza si trasforma nell'equazione che segue

$$\frac{5+x}{2}\left(\frac{5+x}{2}-3\right)\left(\frac{5+x}{2}-2\right)\left(\frac{5+x}{2}-x\right)=9 \quad \rightarrow \quad (x^2-1)(25-x^2)=144 .$$

In definitiva, si ottiene l'equazione biquadratica di quarto grado

$$x^4-26x^2+169=0 ,$$

che può essere riscritta, trattandosi di un quadrato perfetto, nella forma equivalente

$$(x^2-13)^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2=13 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt{13} ,$$

avendo scartato la radice negativa, dato che la lunghezza di un segmento è sempre maggiore di zero.

QUESITO 2

Introdotte le due funzioni di x

$$y=f(x)-f(2x), \;\; z=f(x)-f(4x) ,$$

risulta immediatamente

$$y'=f'(x)-2f'(2x), \;\; z'=f'(x)-4f'(4x) .$$

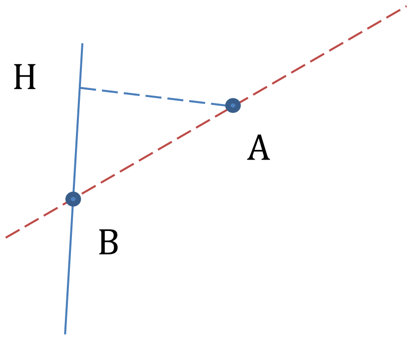
Dai dati assegnati, si deduce allora che

$$f'(1)-2f'(2)=5 , \;\; f'(2)-2f'(4)=7 .$$

Ora, ricavando $f'(2)=7+2f'(4)$ dalla seconda relazione e sostituendo nella prima, si ottiene quanto richiesto

$$f'(1) - 4f'(4) = 5 + 14 = 19 = z'(1)\,.$$

QUESITO 3



Dato che la generica retta passante per B è esprimibile come

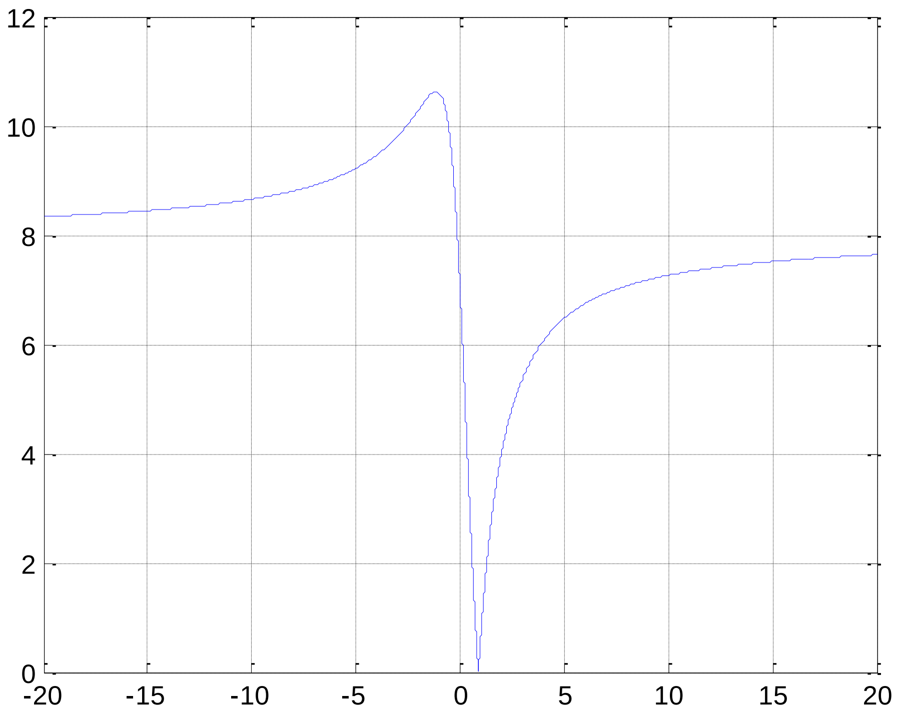
$$y + 8 = M(x + 6) \quad \rightarrow \quad Mx - y + 6M - 8 = 0\,,$$

si può dire che la distanza tra il punto A e questa retta $\overline{AH} = d(M)$ dipende dal coefficiente angolare della retta generica, secondo la ben nota formula

$$d(M) = \frac{|2M + 1 + 6M - 8|}{\sqrt{1 + M^2}} = \frac{|8M - 7|}{\sqrt{1 + M^2}} = \begin{cases} \dfrac{8M - 7}{\sqrt{1 + M^2}}\,, & M \geq \dfrac{7}{8}\,, \\ \dfrac{7 - 8M}{\sqrt{1 + M^2}}\,, & M \leq \dfrac{7}{8}\,. \end{cases}$$

Si verifica facilmente, come suggerisce il grafico precedente, che la distanza assume il valore massimo per

$$M_0 = -\frac{8}{7}\,, \quad d_{MAX} = \sqrt{113} = \overline{AB} = \sqrt{(-6 - 2)^2 + (-8 + 1)^2} \cong 10.63\,.$$



Il coefficiente angolare M_0 corrisponde alla quello della perpendicolare alla retta passante per A e B, che ha pendenza

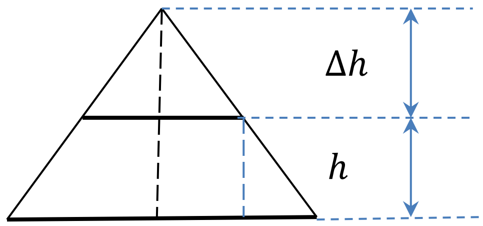
$$M_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7}{8}.$$

In conclusione, ogni retta per B che non sia perpendicolare alla retta che congiunge A con B dista meno della distanza $\overline{AB}$ e la retta per B di massima distanza da A è proprio la perpendicolare per B alla retta $A - B$.

QUESITO 4

Il volume del tronco di piramide si ottiene per differenza da quello della piramide. Sfruttando la similitudine tra triangoli, non è difficile scrivere, con riferimento alla figura che segue, che

$$\Delta h = h\frac{b}{a-b}\,.$$



Pertanto, il volume del tronco di piramide V_T di altezza h vale

$$V_T = \frac{a^2(h+\Delta h)}{3} - \frac{b^2\Delta h}{3} = \frac{a^2 h}{3} + \frac{\Delta h}{3}(a^2 - b^2) =$$
$$= \frac{a^2 h}{3} + \frac{h}{3}\frac{b}{a-b}(a-b)(a+b) = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)\,.$$

In generale, indicando con A l'area della base maggiore, con B quella della minore, si potrebbe dimostrare che il volume di un tronco di piramide a base rettangolare è pari a

$$V_T = \frac{h}{3}\left(A + B + \sqrt{AB}\right).$$

QUESITO 5

Si ponga $V = abc$ il volume iniziale, assimilato ad un parallelepipedo rettangolare. Dopo l'incremento, si può scrivere

$$V + \Delta V = (a+\Delta a)(b+\Delta b)(c+\Delta c)\,.$$

Sviluppando i prodotti e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, risulta

$$V + \Delta V \cong abc + cb\Delta a + ca\Delta b + ab\Delta c\,,$$

ovvero, introducendo il rapporto tra il volume finale e quello iniziale, si ha

$$r = \frac{V + \Delta V}{V} \cong 1 + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \, .$$

Se ora si suppone che i tre incrementi relativi lineari siano uguali, vale a dire

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta c}{c} = \alpha \, ,$$

il tasso di crescita si semplifica come

$$r \cong 1 + 3\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta V}{V} \cong 3\alpha \, .$$

Dalla relazione trovata si evince la tesi proposta nel quesito, cioè

$$\text{per} \quad \alpha = 0.0038 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta V}{V} \cong 3 \cdot 0.0038 = 0.0114 \, .$$

Ragionando in maniera simile per una superficie $S = ab$, si ottiene

$$\frac{\Delta S}{S} \cong 2\alpha$$

e si verifica che

$$\text{per} \quad \alpha = 0.0038 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta S}{S} \cong 2 \cdot 0.0038 = 0.0076 \, .$$

QUESITO 6

Si immagini di dividere in *sette gruppi*, ciascuno costituito da $6! = 720$ elementi, l'insieme delle permutazioni (semplici) delle sette cifre. Il primo gruppo è costituito da tutti i numeri che hanno come prima cifra il numero 1, il secondo gruppo è formato da tutti i numeri che hanno come prima cifra il numero 2, e così via. Questa partizione costituisce un primo naturale ordinamento crescente dell'insieme e consente di affermare che i primi sette numeri dell'insieme sono

$$1234567 - 1234576 - 1234657 - 1234675 - 1234756 - 1234765 - 1235467\,,$$

mentre l'elemento 721, cioè il più piccolo tra quelli che iniziano per 2, è

$$2134567\,.$$

QUESITO 7

Nel gruppo in esame sono presenti 6 su 10 persone con gli occhi azzurri. Pertanto, selezionando a caso due persone, la probabilità P che nessuna delle due abbia gli occhi azzurri vale

$$P = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15} \cong 13.3\ \%\,.$$

QUESITO 8

Risulta immediatamente

$$L = \lim_{x \to \pi} \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} - \mathrm{e}^{\operatorname{sen} \pi}}{x - \pi} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to \pi} \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} - 1}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi} \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} - 1}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}\,.$$

Operando in entrambi i limiti precedenti il cambio di variabile $u = \pi - x$ e ricordando i due limiti fondamentali

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \,, \quad \lim_{y \to 0} \frac{\mathrm{e}^y - 1}{y} = 1 \,,$$

atteso che $\operatorname{sen}(\pi - u) = \operatorname{sen} u$, si ottiene

$$L = -\lim_{u \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(\pi - u)} - 1}{\operatorname{sen}(\pi - u)} \cdot \lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi - u)}{u} = -\lim_{u \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} u} - 1}{\operatorname{sen} u} \cdot \lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = -1 \,.$$

QUESITO 9

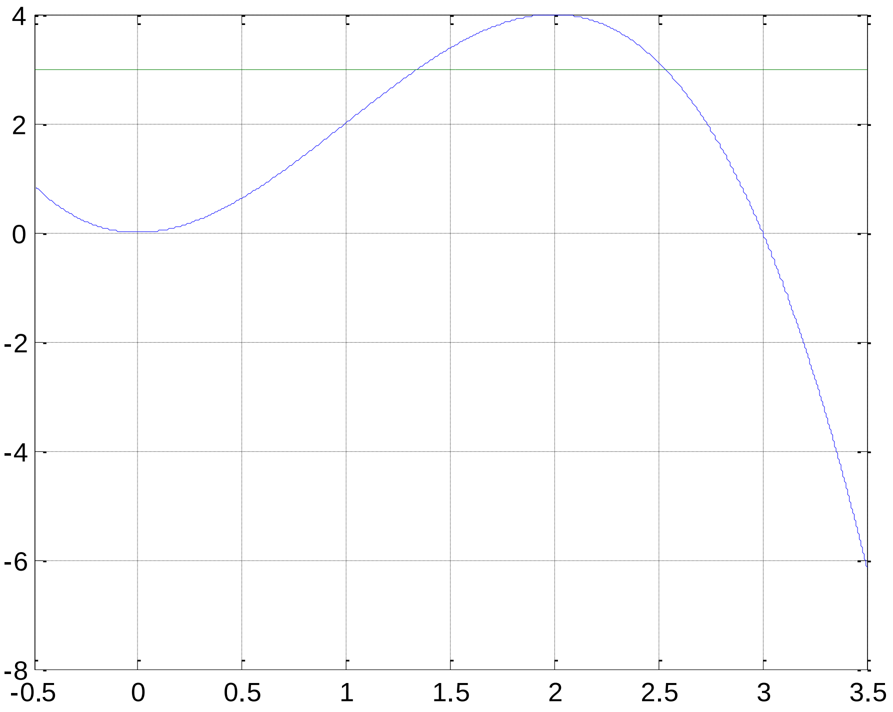
Gli insiemi di numeri razionali ed irrazionali sono entrambi *insiemi numerici infiniti*, ma si può dire che sono di più gli irrazionali. Il motivo di questo è dovuto al fatto che i reali si possono immaginare come unione disgiunta di razionali ed irrazionali; in particolare, tra gli irrazionali ci sono sia irrazionali algebrici, ovvero quelli che si ottengono da un'equazione algebrica a coefficienti interi come $\sqrt{2}$, sia gli irrazionali trascendenti, come e o π, che sono quelli più numerosi. Ora, i razionali sono un insieme numerabile, potendosi mettere in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali; i reali invece sono più che numerabili e, quindi, gli irrazionali devono possedere la potenza del continuo e sono in numero maggiore rispetto ai razionali. *Luisa* ha, in definitiva, ragione.

QUESITO 10

Posto, anzitutto,

$$y = x^2(3 - x) \,,$$

non è difficile rappresentare questa funzione polinomiale e verificare graficamente che, nell'intervallo $0 \leq x \leq 3$, presenta un massimo nel punto $M(2; 4)$ ed una qualsiasi retta parallela all'asse del tipo $y = k$, con $k \leq 4$, la interseca in due punti distinti, uno con ascissa inferiore a quella del massimo, l'altro con ascissa superiore.



Nel caso particolare $k = 3$, concentrandosi sulla radice posta al di là del massimo, si può scrivere il seguente processo iterativo

$$x_{n+1} = g(x_{n-1}) = 3 - \frac{3}{x_n^2},$$

in cui la funzione $g(x) = 3 - 3/x^2$ è una contrazione, dato che

$$0 < g'(x) = \frac{6}{x^3} \leq \frac{1}{8}, \quad \text{per} \quad 2 \leq x \leq 3\,.$$

Posto, allora, $x_1 = 2.5$, si ottiene la successione di valori

$$x_2 = 2.52\,, \qquad x_3 = 2.5276\,, \quad x_4 = 2.5304\,, \quad x_5 = 2.5315\,.$$

Dopo la quinta iterazione, si nota che le prime due cifre decimali si sono stabilizzate.