Soluzione problema 1 ordinamento:
**Punto 1**

$$f(x)=\int_0^x\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha:

$$f'(x)=\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$$

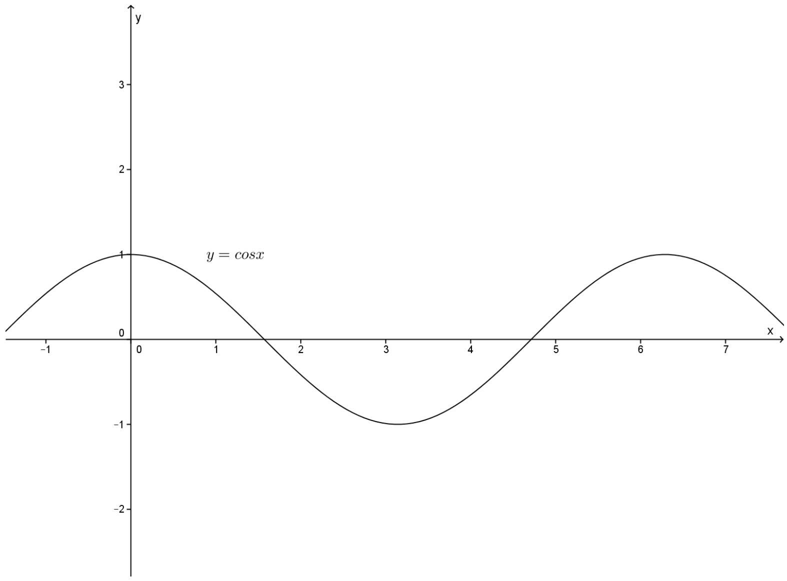
$$f'(\pi)=\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$f'(2\pi)=\cos\pi+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

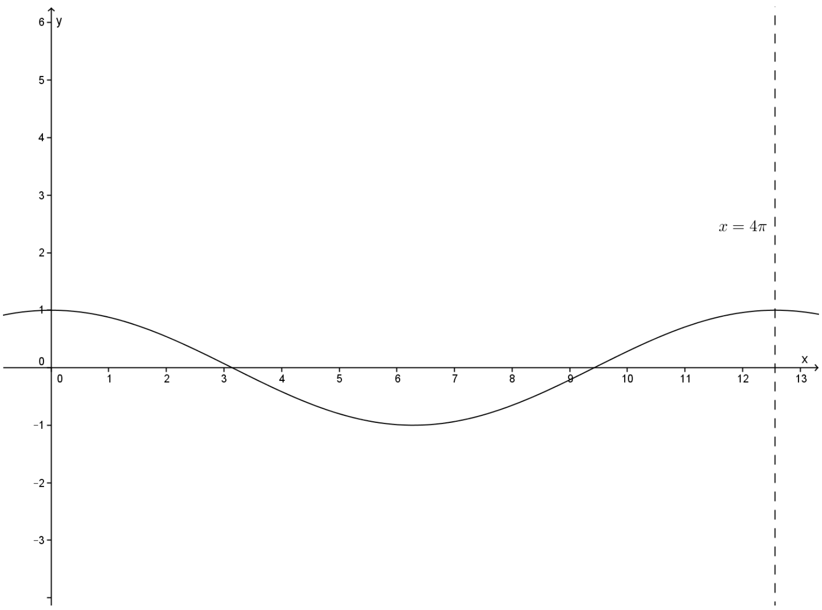
**Punto 2**

La traccia richiede il grafico di $y=f'(x)$.

Deduciamo tale grafico da quello di $y=\cos x$, funzione periodica di periodo $2\pi$.



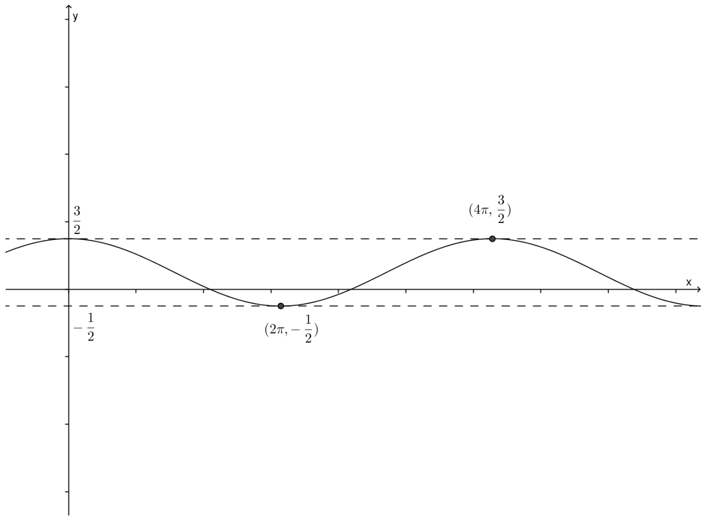

Il grafico di $y=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, funzione periodica di periodo $4\pi$ è:



Applichiamo al grafico $y=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ la traslazione $\vec{v}\left(0,\frac{1}{2}\right)$, otteniamo il grafico

$$y=f'(x)=\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$$

Funzione continua in $R$ e derivabile in $R$.




Limitare il grafico all'intervallo richiesto $[0,9]$.

Determiniamo le intersezioni di $y=f'(x)$ con l'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} y=\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=0 \rightarrow \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$$

Le soluzioni sono:

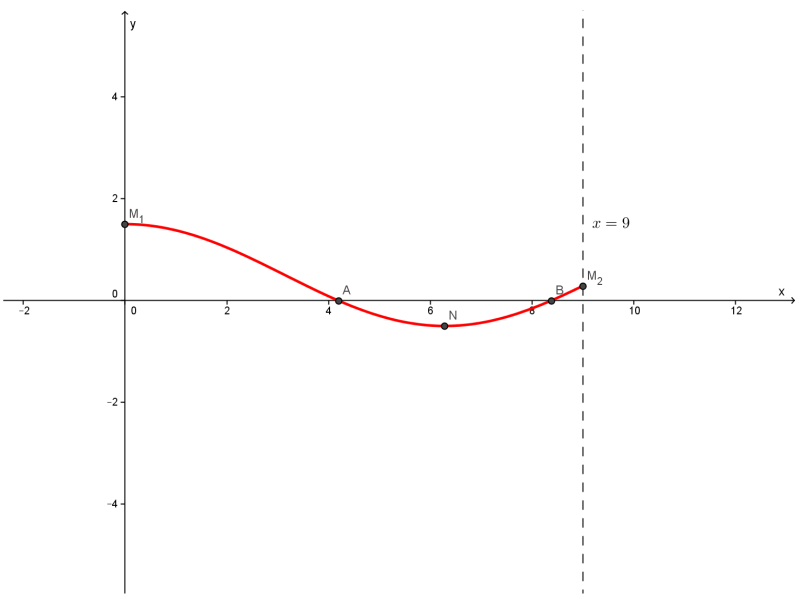
$$x=\left(2\pi\pm\frac{2}{3}\pi\right)+4k\pi, k\in Z$$

Le soluzioni che rientrano nell'intervallo considerato sono:

$x=\frac{4}{3}\pi\cong 4.19$ e $x=\frac{8}{3}\pi\cong 8.38$

Quindi le intersezioni della curva con l'asse delle ascisse nell'intervallo $[0,9]$ sono: $A\left(\frac{4}{3}\pi,0\right);B\left(\frac{8}{3}\pi,0\right)$

Il grafico richiesto è pertanto il seguente:



Nell'intervallo considerato il segno di $f'(x)$ è:

$f'(x) > 0$ per $0 < x < \frac{4}{3}\pi \vee \frac{8}{3}\pi < x < 9$, in tali intervalli la funzione $f(x)$ è crescente

$f'(x) < 0$ per $\frac{4}{3}\pi < x < \frac{8}{3}\pi$, in tali intervalli la funzione $f(x)$ è decrescente.

La $f(x)$ nell'intervallo considerato ha minimo per $x = 0$, massimo per $x = \frac{4}{3}\pi$, minimo per $x = \frac{8}{3}\pi$ e massimo per $x = 9$.

Qual è l'andamento possibile di $y = f(x)$?

Come visto:

$f(x)$ crescente per $x < \frac{4}{3}\pi \vee \frac{8}{3}\pi < x < 9$, dove $f'(x) > 0$

$f(x)$ decrescente per $\frac{4}{3}\pi < x < \frac{8}{3}\pi$, $f'(x) < 0$

Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico $y = f'(x)$

è negativo per $0 < x < 2\pi$

è positivo per $2\pi < x < 9$

è uguale a zero in $x = 0, x = 2\pi$.

Deduciamo quindi che:

$f(x)$ rivolge la concavità verso il basso per $0 < x < 2\pi$, dove $f''(x) < 0$

$f(x)$ rivolge la concavità verso l'alto per $2\pi < x < 9$, dove $f''(x) > 0$

Il grafico presenta un punto di flesso in $x = 2\pi$.

Grafico attendibile di $y = f(x)$.

Dalla definizione segue che $f(0) = 0$ e che l'ordinata del punto di minimo $f\left(\frac{8}{3}\pi\right)$ è sicuramente positiva, come si evince visivamente anche dal grafico.

Quanto sopra dà sufficienti informazioni per descrivere l'andamento del grafico della funzione che può essere anche meglio precisato calcolando $f\left(\frac{4}{3}\pi\right)$, $f\left(\frac{8}{3}\pi\right)$ e $f(9)$.

Essendo:

$$\int\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt = 2\int\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt + \int\frac{1}{2}dt = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{t}{2}+c \text{ , } c \in R$$

$$f(x) = \int_0^x\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{t}{2}\right]dt = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}$$

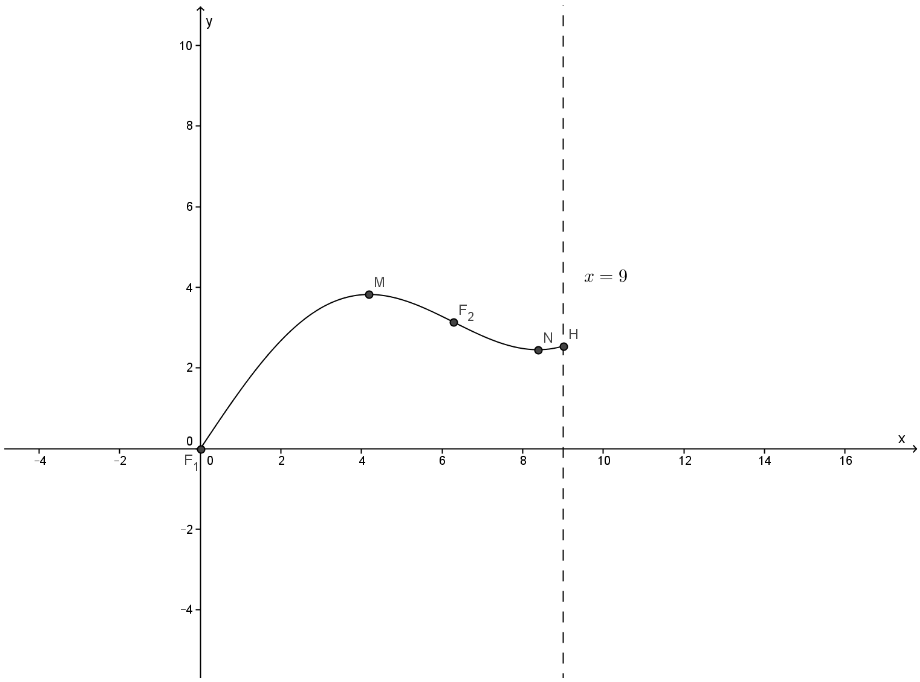
$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{2}{3}\pi = \sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi \cong 3.83$$

$$f\left(\frac{8}{3}\pi\right)=2\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)+\frac{4}{3}\pi=-\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\cong 2.46$$

$$f(9)=2\sin\left(\frac{9}{2}\right)+\frac{9}{2}\cong 2.54$$

Il grafico è il seguente:




**Punto 3**

Calcoliamo il valore medio della funzione $f'(x)$ in $[0,2\pi]$.

La funzione è continua in $R$ e quindi è continua in $[0,2\pi]$, soddisfa pertanto le ipotesi del teorema della media.

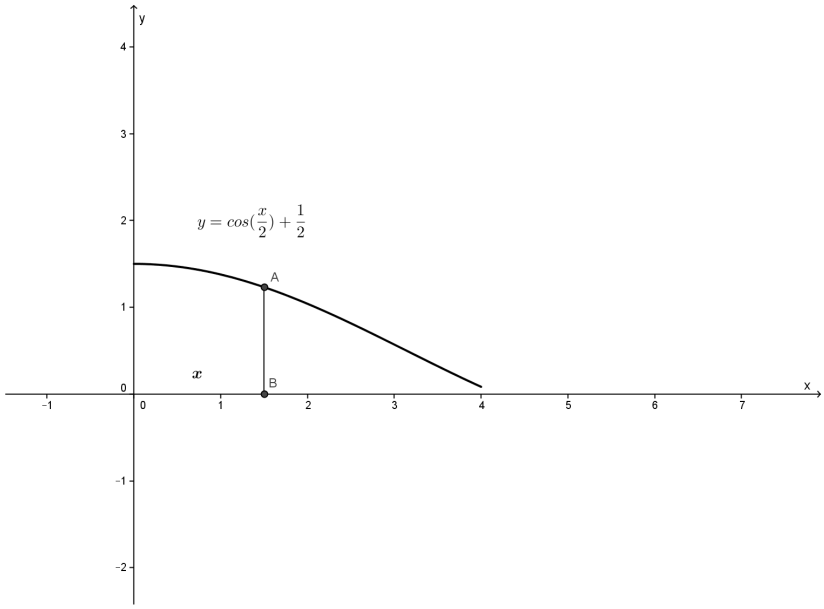
Esiste quindi almeno un $c\in[0,2\pi]$ tale che: $f(c)=\frac{\int_0^{2\pi} f'(x)\,dx}{2\pi}$.

$\int f'(x)dx=f(x)+c=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2},c\in R$, per quanto visto nel punto 2.

$$\int_0^{2\pi} f'(x)dx=2\sin(\pi)+\pi=\pi$$

$$f(c)=\frac{\int_0^{2\pi} f'(x)\,dx}{2\pi}=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$$

**Punto 4**




Il volume del solido di rotazione è:

$$V(W) = \int_0^4 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx = \frac{12}{\pi}\int_0^4 \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx = -\frac{12}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_0^4 = \frac{24}{\pi}.$$