Ministero dell'istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

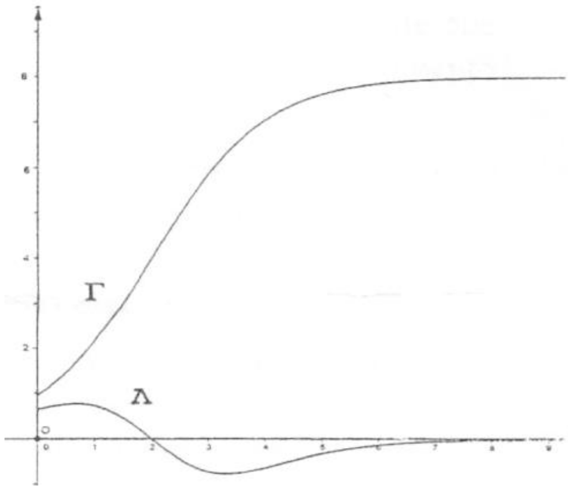
Indirizzo:PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di:MATEMATICA

Problema 1

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0;+\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate (2;4), passa per (0;0), mentre le rette y=8 e y=0 sono asintoti orizzontali per Γ e Λ, rispettivamente.

1) Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è: $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$, qual è un possibile andamento di $f'(x)$?
2) Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?



3) Se Γ è il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{a}{2+e^{b-x}}$, si provi che a=8 e b=2.
4) Nell'ipotesi del punto 3), si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo [0;2].

Soluzione

1) La funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0;+\infty[$ ammette le derivate dei primi due ordini, è positiva e dall'andamento del suo diagramma (curva Γ) si evince che si tratta di una funzione strettamente crescente e ciò implica che la funzione derivata prima $f'(x)$ è non negativa.

   Osservando il diagramma della funzione derivata seconda si nota che x=2 è uno zero e che in un opportuno intorno completo I(2) di tale punto la derivata seconda è positiva a sinistra e negativa a destra e pertanto la funzione derivata prima, limitatamente all'intervallo I(2), è crescente a sinistra di x=2 e decrescente a destra dello stesso, per cui il punto x=2 è di massimo relativo per la funzione derivata prima. Per determinare l'ordinata del punto di massimo per la funzione derivata prima, cioè $f'(2)$, si può sfruttare l'equazione della retta tangente a Γ nel punto di flesso F(2;4) della quale è noto che passa per l'origine O degli assi.

Equazione della tangente inflessionale $t_F : y - f(2) = f'(2)(x-2)$, quindi $t_F : y - 4 = f'(2)(x-2)$. Imponiamo che l'equazione sia soddisfatta dalla coppia (0;0) e si ha la condizione $-4 = -2f'(2)$, da cui $f'(2) = 2$. Concludiamo che il punti di massimo di della funzione derivata prima è M(2;2). L'equazione della tangente inflessionale è y=2x.

Sull'andamento di $y=f'(x)$

Abbiamo già precisato che $f'(x) \geq 0$. Possiamo aggiungere che l'andamento asintotico per $x \to +\infty$ della curva Γ alla retta y=8 indica che il coefficiente angolare della retta tangente al diagramma di $y=f(x)$ nel generico punto $P(x_0; f(x_0))$ tende a zero (la tangente tende ad assumere la direzione dell'asintoto y=8) e quindi deve aversi $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, dunque l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per il diagramma di $y=f'(x)$.

Nel punto iniziale :$x=0$?

Al momento non disponiamo di sufficienti informazioni per stabilire il valore $f'(0)$; tuttavia, dalla sussistenza $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$ nel dominio di definizione e tenendo conto dei diagrammi delle due funzioni $y= f(x)$ e $y=f''(x)$ sappiamo che il punto $(0; f'(0))$ si trova tra i due punti in cui le curve Γ e Λ intersecano l'asse delle ordinate.

L'andamento del diagramma di $y = f'(x)$ nella figura riportata di seguito è indicato con stile tratteggio.

Nota

Poiché l'elaborazione grafica è il risultato di elaborazioni digitali, e non di disegno a mano libera, è evidente che il diagramma è stato costruito dopo aver risolto il successivo quesito 3).

2) Informazioni sul modello di crescita della popolazione

Il fatto che la funzione $y=f(x)$ sia strettamente crescente in tutto il dominio $[0;+\infty[$, cosa che si evince dalle caratteristiche del diagramma, indica che la popolazione cresce per ogni x (se x è un parametro temporale, la popolazione cresce comunque negli istanti successivi ad $x=0$). La crescita avviene con ritmi diversi: la velocità con cui cresce la numerosità della popolazione è descritta dalla funzione derivata prima e si deduce che nell'intervallo $]0;2[$ il ritmo è più sostenuto, mentre per $x>2$ il processo di crescita rallenta. Queste informazioni sono dedotte dalla conoscenza che in x=2 la curva Γ presenta il flesso F(2;4) ed $f'(2) = 2$ rappresenta il massimo valore raggiunto dal ritmo di crescita. Per valori di $x \to +\infty$ la numerosità della popolazione tende al valore teorico di 8 (unità convenzionali, milioni, miliardi, o altra unità di misura), che comunque non sarà raggiunto in futuro e resterà come l'estremo superiore cui tenderà la numerosità della popolazione.

3) Partendo dall'affermazione che la curva Γ sia il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{a}{2+e^{b-x}}$, la presenza dell'asintoto orizzontale y=8 permette di determinare velocemente il parametro a. Infatti, dalla definizione di asintoto orizzontale, poiché si ha

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{a}{1+e^{b-x}}=\dfrac{a}{1+e^{-\infty}}=a$, si deduce che la retta y=*a* è asintoto orizzontale per il diagramma per x→+∞, per cui deve essere *a*=8. La funzione assume la forma

$$f(x)=\frac{8}{1+e^{b-x}}.$$

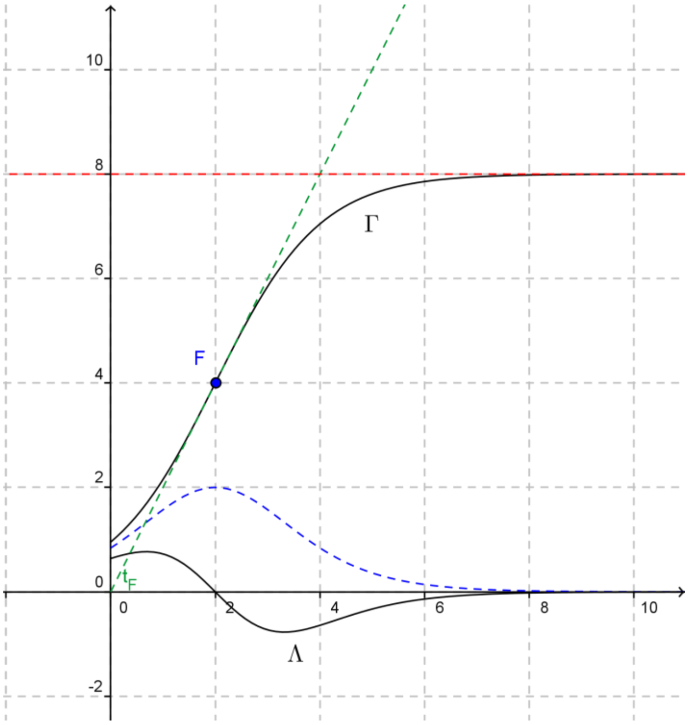


Figura 1- La curva in stile tratteggio rappresenta il diagramma della funzione y=f'(x).

Per determinare il parametro b possiamo calcolare la funzione derivata prima e sfruttare l'informazione già acquisita che $f'(2)=2$.

$f'(x)=\dfrac{8\cdot e^{b-x}}{\left(1+e^{b-x}\right)^2}$, da cui

$f'(2)=\dfrac{8\cdot e^{b-2}}{\left(1+e^{b-2}\right)^2}=2$. Si deve risolvere l'equazione

$4\cdot e^{b-2}=\left(1+e^{b-2}\right)^2$ nell'incognita *b*.

Ponendo $e^{b-2}=t$ e sviluppando i calcoli si perviene all'equazione equivalente $1-2t+t^2=0$, soddisfatta solo da t=1, quindi deve risultare $e^{b-2}=2$, dunque deve essere b=2. Concludiamo che la funzione cercata ha la seguente forma

$$f(x)=\frac{8}{1+e^{2-x}},\ \text{con } x\geq 0.$$

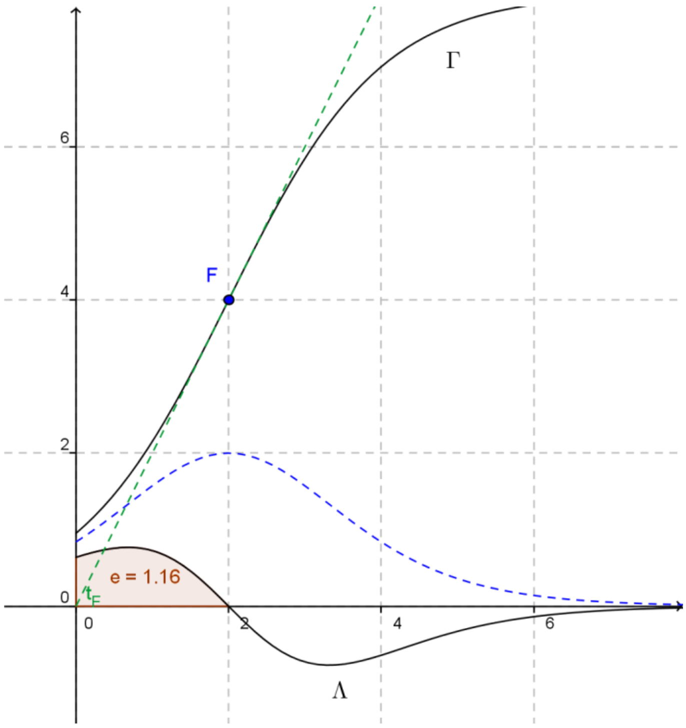


Figura 2

4) Calcolo dell'area della regione piana indicata

Nell'intervallo [0;2] la funzione derivata seconda è non negativa e quindi il valore dell'area della regione piana indicata è quello del seguente integrale definito:

$$\int_0^2 f''(x)\,dx.$$

Per calcolare questo valore non è necessario determinare esplicitamente l'espressione della derivata seconda perché serve avere di questa una primitiva qualsiasi (teorema fondamentale del calcolo integrale); ebbene una primitiva è la funzione

$y = f'(x) = \dfrac{8\cdot e^{b-x}}{\left(1+e^{b-x}\right)^2}$, che con b=2 diventa $f'(x) = \dfrac{8\cdot e^{2-x}}{\left(1+e^{2-x}\right)^2}$.

Pertanto il valore dell'integrale definito è

$$\int_0^2 f''(x)\,dx = \left[\frac{8\cdot e^{2-x}}{\left(1+e^{2-x}\right)^2}\right]_0^2 = \frac{8}{2^2} - \frac{8e^2}{\left(1+e^2\right)^2} = \frac{2\left(1-e^2\right)^2}{\left(1+e^2\right)^2} \approx 1{,}16005$$