Soluzione problema 2 ordinamento

Punto 1

$$f(x)=\frac{8}{4+x^2}$$

E' una funzione algebrica, razionale fratta, con denominatore sempre diverso da zero, quindi continua in R e derivabile in R. Non presenta quindi asintoti verticali.

E' sempre positiva.

E' una funzione pari in quanto $f(-x)=\frac{8}{4+(-x)^2}=\frac{8}{4+x^2}=f(x)$, il suo grafico è pertanto simmetrico rispetto l'asse delle ordinate.

Essendo il grado del numeratore minore del grado del denominatore la curva presenta asintoto orizzontale di equazione $y=0$, infatti:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{4+x^2}=0\to y=0$ è asintoto orizzontale.

Studio del segno della derivata prima:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{8}{4+x^2}\right)=-\frac{16\,x}{(x^2+4)^2}$$

La derivata prima è positiva per $x<0$, negativa per $x>0$.

La curva pertanto cresce per $x<0$, decresce per $x>0$, ha un punto di massimo assoluto in $(0,2)$.

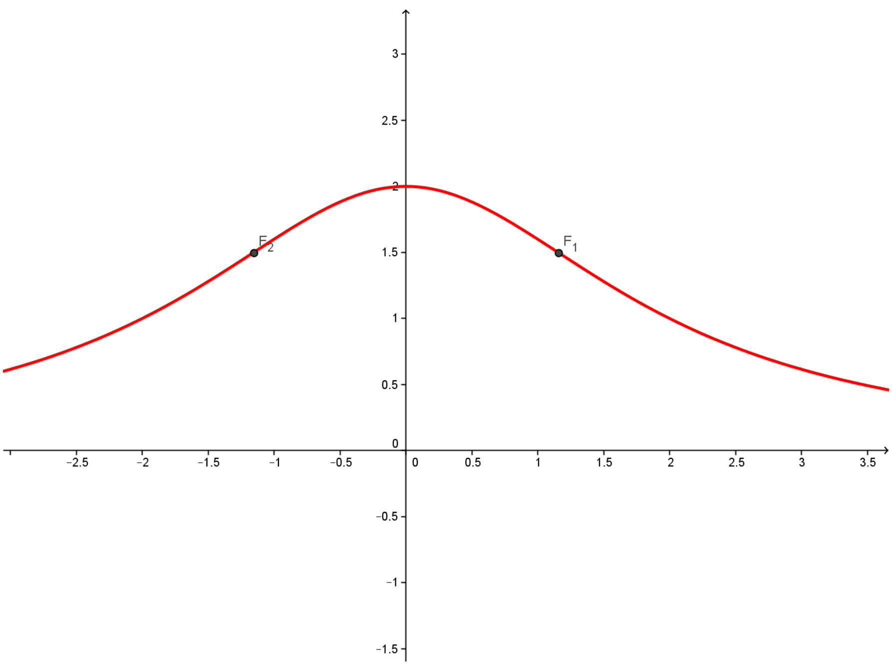
Studio del segno della derivata seconda:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{16\,x}{(4+x^2)^2}\right)=\frac{16\,(3\,x^2-4)}{(x^2+4)^3}$$

$$3x^2-4>0\to x<-\frac{2}{\sqrt{3}}\vee x>\frac{2}{\sqrt{3}}$$

La concavità è rivolta verso l'alto per $x<-\frac{2}{\sqrt{3}}\vee x>\frac{2}{\sqrt{3}}$

La concavità è rivolta verso il basso per $-\frac{2}{\sqrt{3}}<x<\frac{2}{\sqrt{3}}$



I punti di flesso hanno coordinate:

$$F_2\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{3}{2}\right);F_1\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{3}{2}\right)$$

Determiniamo le equazioni delle rette tangenti alla curva nei punti $P(-2,1), Q(2,1)$.

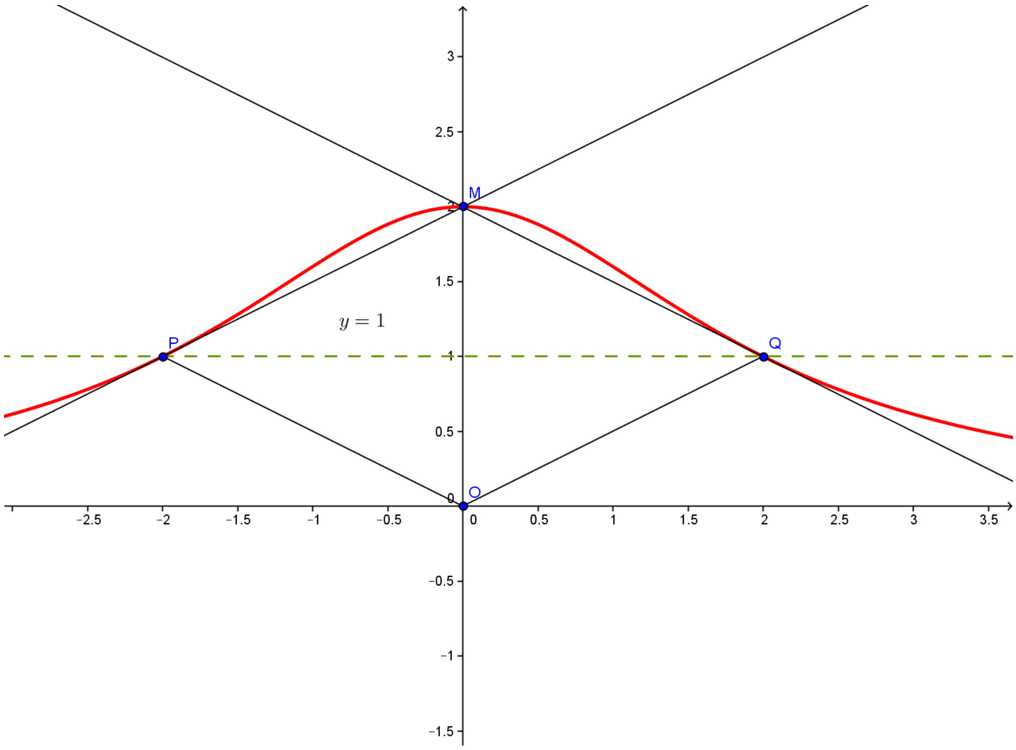
Equazione della retta tangente in $Q(2,1)$:

$$f'(2) = -\frac{1}{2} \rightarrow y-1 = -\frac{1}{2}(x-2) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x+2$$

Per la simmetria rispetto all'asse delle ordinate l'equazione della retta tangente alla curva in $P(-2,1)$ è:

$$y = \frac{1}{2}x+2.$$

Le due rette si incontrano in $M(0,2)$.



Il quadrilatero $OQMP$ è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, in quanto lo sono i punti P,Q e M,O appartengono all'asse delle ordinate, quindi: $\overline{MP} = \overline{MQ}; \overline{OP} = \overline{OQ}$

Il quadrilatero è simmetrico anche rispetto alla retta $y = 1$, in quanto lo sono i vertici M,O e i vertici P,Q appartengono alla retta $y = 1$, quindi: $\overline{OP} = \overline{PM}; \overline{OQ} = \overline{QM}$

Pertanto il quadrilatero è un rombo.

Determiniamo la misura dell'angolo acuto OQM.

Il coefficiente angolare della retta OQ è $m(OQ) = \frac{1}{2}$

Il coefficiente angolare della retta QM è $m(QM) = -\frac{1}{2}$

Quindi:

$$tg(OQM) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \rightarrow OQM = arctg\frac{4}{3}$$

La misura degli angoli $OQM = OPM$ espressa in gradi e primi sessagesimali è pertanto: $53°8'$

La misura degli angoli $QMP = POQ$ espressa in gradi e primi sessagesimali è pertanto: $126°52'$

Punto 2

L'equazione della circonferenza è $x^2+(y-1)^2=1 \to x^2+y^2-2y=0$

Consideriamo la retta generica passante per origine $y=mx$ con $m \neq 0$ altrimenti non si avrebbero intersezioni con la retta $y=2$

Determiniamo le coordinate di A

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ y=mx \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{2m}{1+m^2} \\ y=\dfrac{2m^2}{1+m^2} \end{cases} \qquad A\left(\frac{2m}{1+m^2},\frac{2m^2}{1+m^2}\right)$$

Determiniamo le coordinate di B

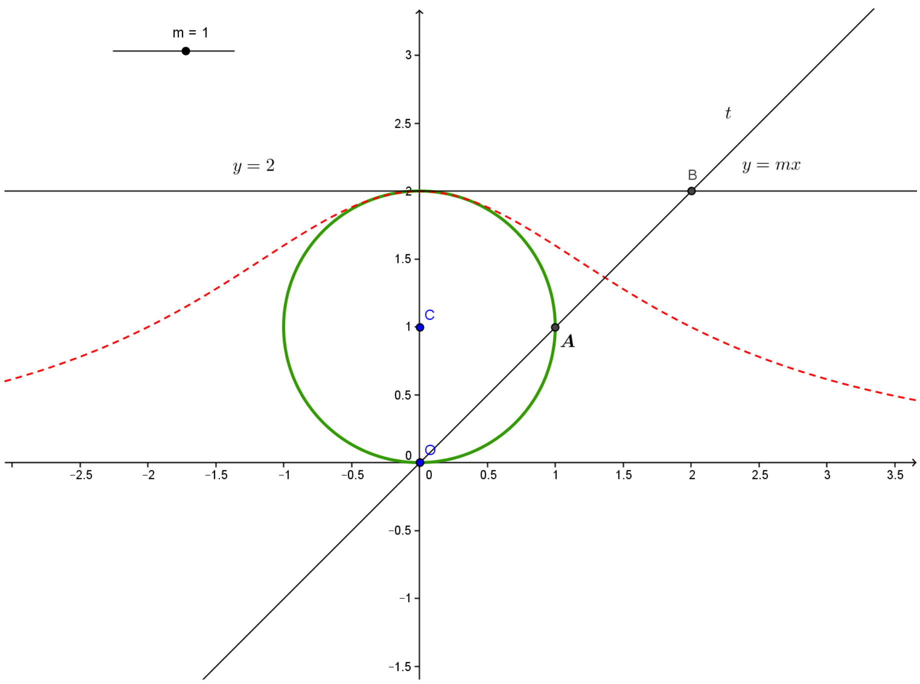
$$\begin{cases} y=2 \\ y=mx \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{2}{m}, m\neq 0 \\ y=2 \end{cases} \qquad B\left(\frac{2}{m},2\right)$$

le coordinate del punto P sono: $P\left(\dfrac{2}{m},\dfrac{2m^2}{1+m^2}\right)$.

Ci chiediamo se il punto $P\left(\dfrac{2}{m},\dfrac{2m^2}{1+m^2}\right)\in \Phi$ di equazione $y=\dfrac{8}{4+x^2}$.

Sostituendo nell'equazione le coordinate di P otteniamo:

$\dfrac{2m^2}{1+m^2}=\dfrac{2m^2}{1+m^2}$ la risposta è sì.



Se poi si considera l'asse delle ordinate, retta passante per O e non appartenente al fascio $y=mx$, le intersezioni A,B coincidono e hanno coordinate $(0,2)$. Il punto P ha coordinate $(0,2)$ e quindi appartiene a Φ.

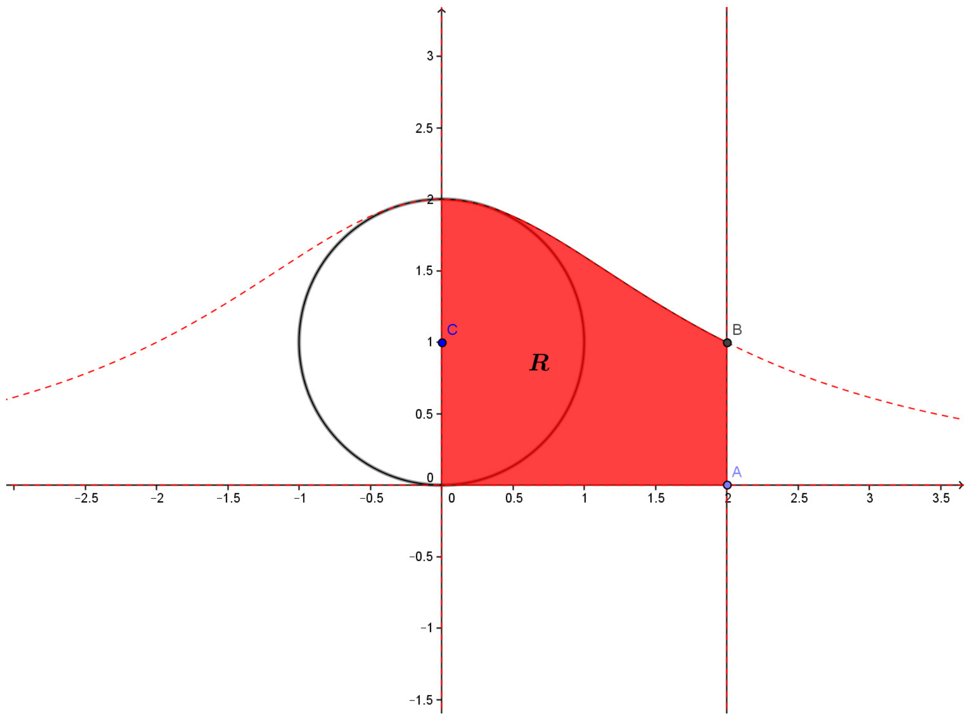
Punto 3

Calcoliamo l'area della regione R

$$\int \frac{8}{4+x^2} = \frac{8}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = 2\cdot 2\int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = 4arctg\left(\frac{x}{2}\right)+c, c\in R$$

Area (R) = $\int_0^2 \frac{8}{4+x^2} = \left[4arctg\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 = 4arctg1 = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi$

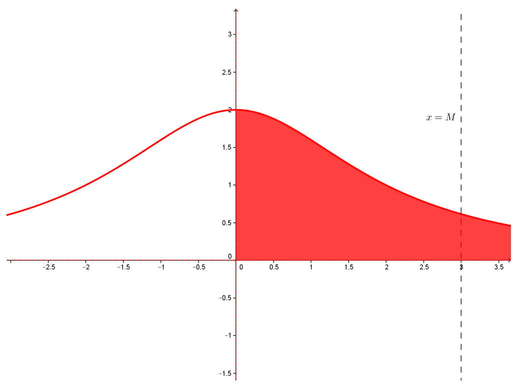
Area (Cerchio)= π



Calcoliamo ora l'area A_1 della regione di piano situata nel primo quadrante , compresa tra Φ e il semiasse positivo delle ascisse.

$$A_1 = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{8}{4+x^2} = \lim_{M\to+\infty}\left[4arctg\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^M$$

$$= \lim_{M\to+\infty}\left[4arctg\left(\frac{M}{2}\right)\right] = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$$



Quindi l'area richiesta è:

$A = 2A_1 = 4\pi$, cioè quattro volte l'area del cerchio.

Punto 4

Consideriamo la superficie laterale del cilindro di figura, di raggio di base x e altezza $f\left(x\right)$

La superficie laterale è: $S_l = 2\pi \cdot x \cdot f\left(x\right)$

Il volume del “guscio cilindrico” di spessore dx è: $dV = 2\pi \cdot x \cdot f\left(x\right) \cdot dx$

Il volume del solido di rotazione W è: $V = \int_0^2 2\pi \cdot x \cdot f\left(x\right) \cdot dx = 2\pi \int_0^2 \frac{8x}{4+x^2} dx$.