Problema 2

Punto 1.

La funzione non è definita per *x = 0,* però :

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 lnx = \lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} (-\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3x^2}{x^6}}) = \lim_{x\to 0^+} (-\frac{1}{x} \cdot \frac{x^6}{3x^2}) = 0$$

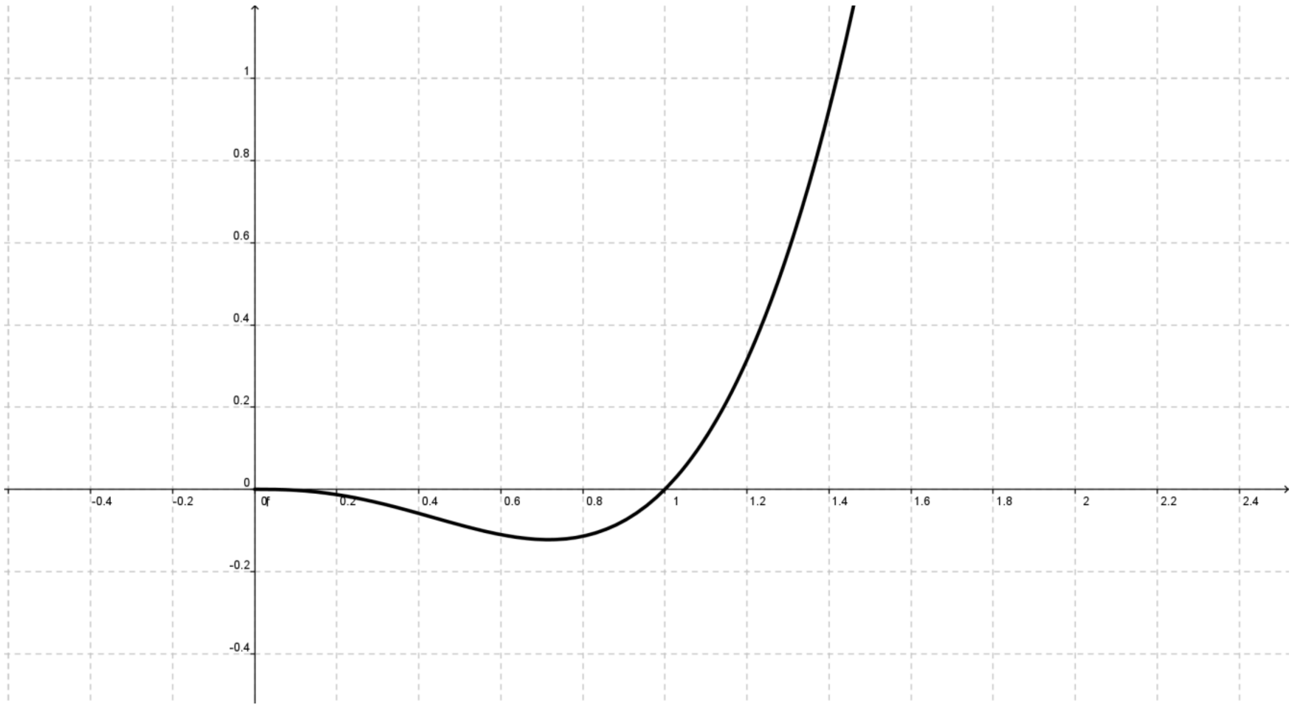
$$f'(x) = 3x^2 lnx + x^2 = x^2(3lnx + 1)$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow 3lnx + 1 > 0 \rightarrow lnx > -\frac{1}{3} \rightarrow x > e^{\left(-\frac{1}{3}\right)} = 0{,}721$$

Perciò per *x = 0,721* si ha il minimo che è il minimo assoluto la cui ordinata è circa *– 0,122.*

$$f''(x) > 0 \rightarrow lnx > -\frac{5}{6} \rightarrow x > e^{\left(-\frac{5}{6}\right)} = 0{,}438$$

Perciò per *x = 0,438* si ha il flesso la cui ordinata è circa - 0,067.



Punto 2.

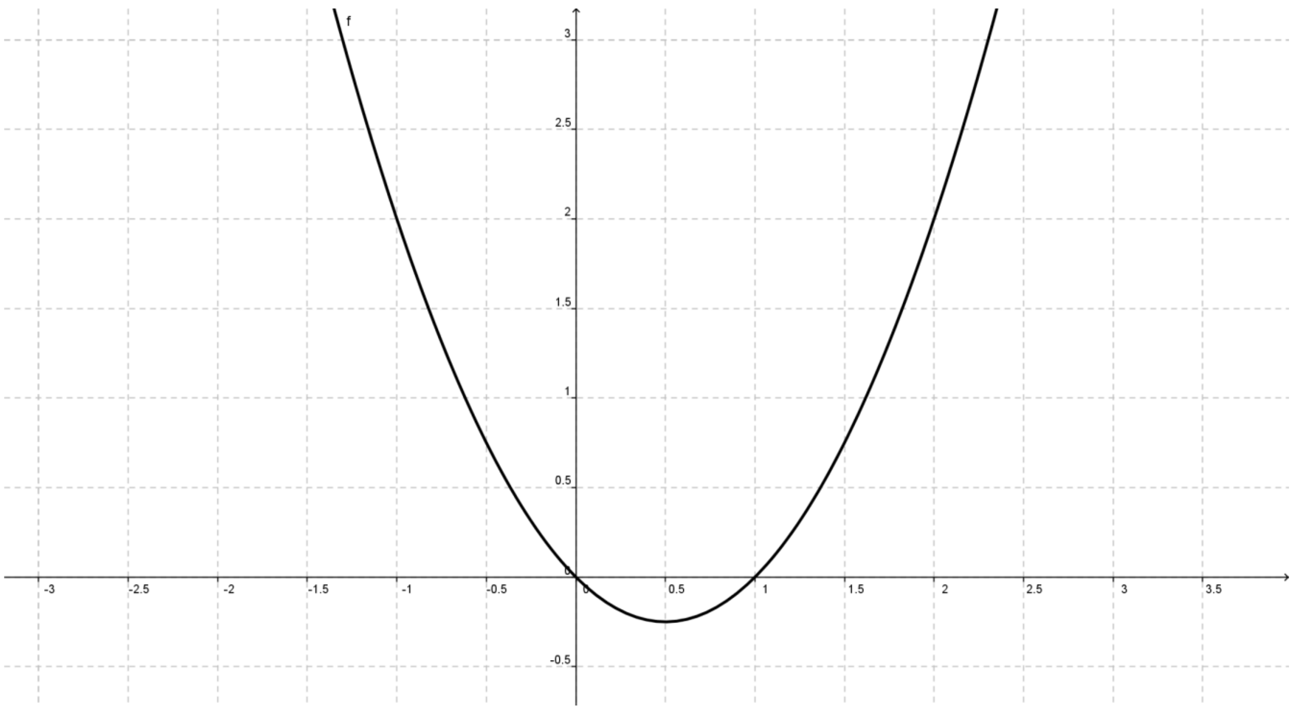
Il punto P ha coordinate P(1 , 0).

La parabola ha equazione $y(x) = ax^2 + bx$ poiché passa per l'origine delle coordinate. Inoltre si deve avere :

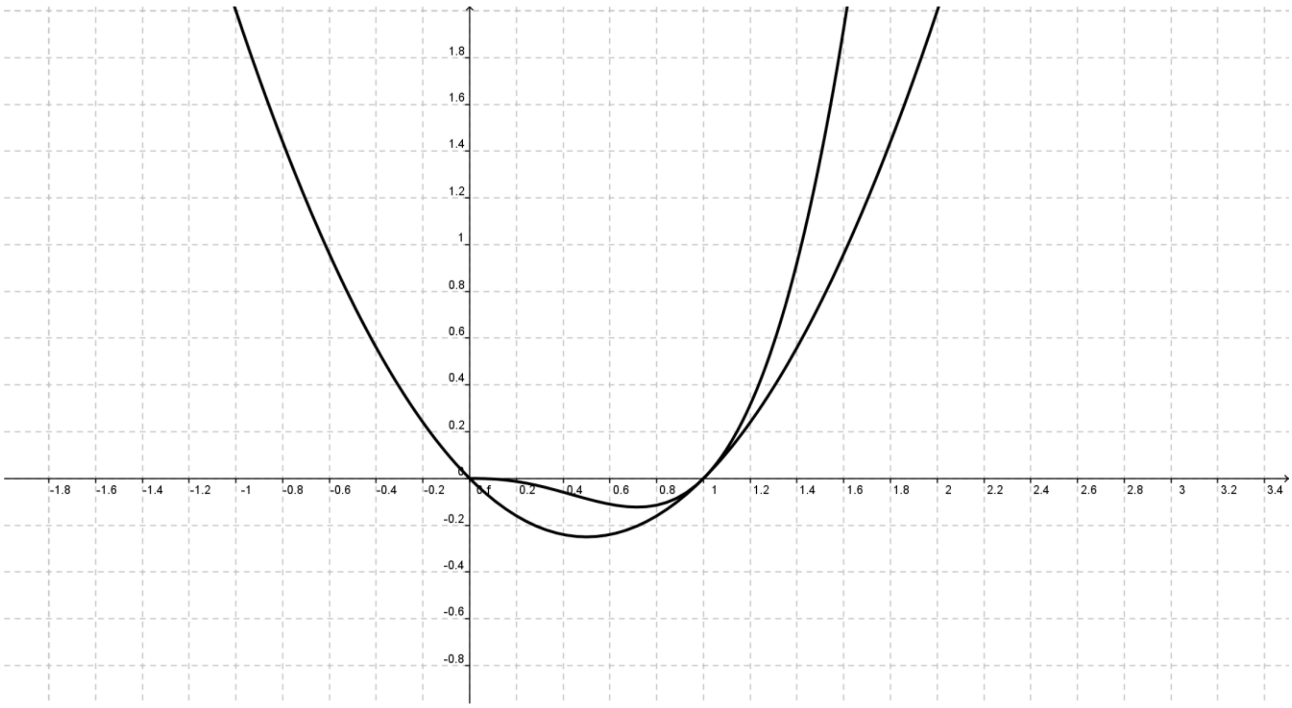
$y(1) = a + b = 0$ perché la parabola deve passare per il punto P , ed anche

$y'(1) = f'(1)$ perché essa deve essere tangente a γ in P, cioè $2a - a = 1;$ se ne deduce che:

$a = 1$ e $b = -1$; perciò la parabola ha equazione : $y = x^2 - x$; il grafico della parabola è il seguente:



Nella figura seguente sono disegnati nello stesso sistema di assi cartesiani i grafici della parabola e della funzione f.



Punto 3.

Osserviamo che la regionre R è tutta al di sotto dell' asse x e che la funzione f non è continua in zero, pertanto l'area richiesta è data dal valore assoluto del seguente limite :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{1} x^3 lnx dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{4} x^4 lnx - \frac{1}{16} x^4\right]_{\epsilon}^{1} = -\frac{1}{16}$$

E quindi l'area vale : $\frac{1}{16}\ dm^2 = \frac{10000}{16} mm^2 = 625\ mm^2$

Punto 4.

Le equazioni della simmetria rispetto all'asse y sono : $\begin{cases} x = -X \\ y = Y \end{cases}$ e quindi la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y ha equazione:

$y = -x^3 ln(-x)$ con $x < 0$.

Le equazioni della simmetria rispetto alla retta di equazione $y = -1$ sono:

$$\begin{cases} x = X \\ \dfrac{y + Y}{2} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = X \\ y = -2 - Y \end{cases}$$

E pertanto si ha:

$-2 - y = x^3 lnx \quad da\ cui \quad y = -x^3 lnx - 2$ che è l'equazione della curva simmetrica di γ rispetto alla retta di equazione $y = -1$.