Ministero dell'istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo:PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di:MATEMATICA

Problema 2

Sia f la funzione definita per tutti gli x positivi da $f(x) = x^3 \ln x$.

1. Si studi f e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.
2. Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x. Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine e tangente a γ in P.
3. Sia R la regione piana delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra]0;1]. Si calcoli l'area di R, illustrando il ragionamento seguito, e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 decimetro.
4. Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta y=-1.

Soluzione

1. Studio del Grafico
   a. Dominio e classificazione- La funzione è trascendente logaritmica ed ha come dominio di definizione l'intervallo]0;+∞[.
   b. Segno e zeri- La funzione si annulla solo per x=1, è negativa per 0<x<1, è positiva per x>1.
   c. Limiti agli estremi del dominio

   $\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln(x) = 0^-$ (si tratta di un limite notevole)

   $$\lim_{x\to+\infty} x^3 \ln(x) = +\infty; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \ln(x) = +\infty$$

   Il diagramma della funzione non presenta alcun asintoto.

   d. Monotonia, massimi e minimi relativi

   Derivata prima $\qquad f'(x) = 3x^2 \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2\left(3\ln(x)+1\right)$

$f'(x)=0$ per $x=e^{-\frac{1}{3}}$; $f'(x)<0$ nell'intervallo $0<x<e^{-\frac{1}{3}}$, dove la funzione è strettamente decrescente; $f'(x)>0$ per $x>e^{-\frac{1}{3}}$, dove la funzione è strettamente crescente. Il punto $x=e^{-\frac{1}{3}}$ è di **minimo assoluto** e risulta $\min = f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)=-\frac{1}{3e}\approx$ $-0{,}1226\approx-0{,}123$.

Il codominio della funzione è l'intervallo $\left[-\frac{1}{3e};+\infty\right[$.

e. Concavità e flessi

Derivata seconda

$$f''(x)=2x(3\ln(x)+1)+x^2\cdot\frac{3}{x}=$$
$$x(6\ln(x)+5)$$

$f''(x)=0$ solo per $x=e^{-\frac{5}{6}}\approx$ $0{,}4346\approx 0{,}435$;

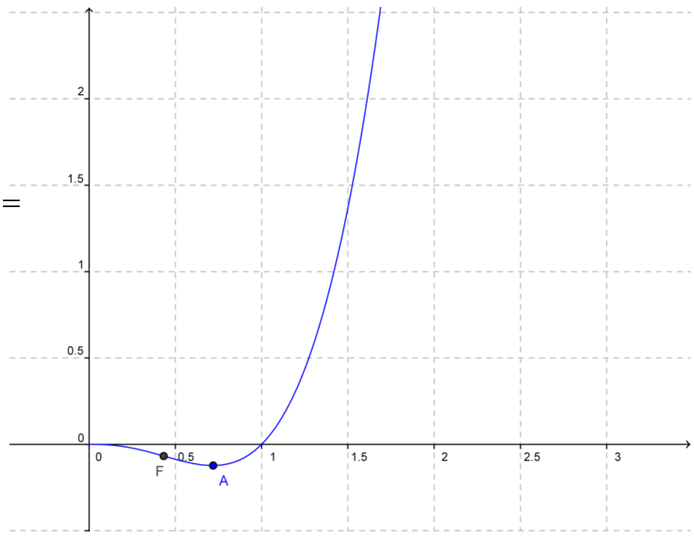

Figura 1

$f''(x)<0$ nell'intervallo $0<x<e^{-\frac{5}{6}}$, dove il grafico volge la concavità verso il basso (la funzione è concava);

$f''(x)>0$ per $x>e^{-\frac{5}{6}}$, dove la concavità del grafico è rivolta verso l'alto (la funzione è convessa).

Il punto $x=e^{-\frac{5}{6}}$ risulta essere di flesso ascendente; $f\left(e^{-\frac{5}{6}}\right)=e^{-\frac{5}{2}}\left(-\frac{5}{6}\right)\approx-0{,}068$.

2. Il punto di intersezione di γ con l'asse x è P(1;0).

Ricerca dell'equazione della retta tangente al diagramma γ in P

$t_P: y-f(1)=f'(1)(x-1)$; essendo $f'(1)=1$ si ha $t_P: y=x-1$.

Sia λ la parabola richiesta. La sua equazione è del tipo $\lambda: y=ax^2+bx$. Per determinare i valori dei due parametri a e b imponiamo le due condizioni: passaggio di λ dal punto P e che il valore della derivata prima della funzione $y = ax^2 + bx$ in x=1 sia uguale al coefficiente angolare della retta tangente in P.

$P \in \lambda \to a + b = 0$;

$y = ax^2 + bx \to y' = 2ax + b$, da cui $y'(1) = 2a + b = 1$

Risolvendo il sistema di equazioni $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases}$ si ottiene $\begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$ e quindi $\lambda : y = x^2 - x$.

3. Calcolo dell'area della regione R

La regione piana in oggetto è situata nel semipiano delle ordinate negative e precisiamo che non contiene il punto origine O(0;0) perché in x=0 non è definita la funzione y=$f(x)$. Del resto, dallo studio del limite per $x \to 0+$ abbiamo riconosciuto che detto limite valeva zero per cui la funzione presenta in x=0 un punto di discontinuità eliminabile (la discontinuità è di terza specie). Dal punto di vista analitico si elimina la discontinuità definendo a partire dalla funzione y=$f(x)$ un'altra funzione, che indichiamo con $\varphi(x)$ che differisce da quest'ultima solo nel punto x=0 ponendo:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3 \ln(x) & per \quad x > 0 \\ 0 & per \quad x = 0 \end{cases}$$

Questa **funzione** è detta **prolungamento per continuità** nel punto x=0 della funzione y=$f(x)$. Utilizzando questa funzione si può calcolare l'area della regione piana R in oggetto e risulta

$$Area(R) = \int_0^1 -\varphi(x)\,dx.$$

Aspetto operativo

Dovendo utilizzare nell'espressione della funzione integranda la funzione $x^3 \ln(x)$, per il calcolo dell'integrale definito si deve affrontare lo studio del seguente integrale

$\int_\varepsilon^1 -\varphi(x)\,dx = \int_\varepsilon^1 -x^3 \ln(x)\,dx$, con $0 < \varepsilon < 1$, e successivamente studiare il limite

$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 -x^3 \ln(x)\,dx$ e se il valore ottenuto sarà finito, il risultato rappresenterà l'area della regione R.

Elaborazioni

Calcoliamo preventivamente l'integrale indefinito applicando il metodo di integrazione per parti; successivamente valuteremo il limite su indicato.

$$\int -x^3 \ln(x)\,dx = -\int D\left(\frac{x^4}{4}\right)\ln(x)\,dx = -\left(\frac{x^4}{4}\right)\ln(x) + \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx = -\frac{x^4}{4}\cdot\ln(x) + \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$

$$-\frac{x^4}{4}\cdot\ln(x) + \frac{x^4}{16} + c$$

Integrale definito e studio del limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1} -x^3\ln(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{x^4}{4}\cdot\ln(x)+\frac{x^4}{16}\right]_{\varepsilon}^{1} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\left(-\frac{1}{4}\cdot\ln(1)+\frac{1}{16}\right)-\left(-\frac{\varepsilon^4}{4}\cdot\ln(\varepsilon)+\frac{\varepsilon^4}{16}\right)\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{16}+\frac{\varepsilon^4}{4}\cdot\ln(\varepsilon)-\frac{\varepsilon^4}{16}\right) = \frac{1}{16}+0-0=\frac{1}{16}$$

Poiché il valore ottenuto è finito e positivo, esso rappresenta l'area della regione piana R.

Osservazione

Nello studio del limite si è utilizzato ancora una volta il limite notevole $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^4\cdot\ln(\varepsilon)=0$.

Tenendo conto della richiesta sull'espressione del valore dell'area in mm^2, poiché il valore ottenuto è espresso in dm^2 perché l'unità di misura lineare assunta nel testo è il dm, per l'area si ha:

$$Area(R) = \frac{1}{16}dm^2 = \frac{1}{16}\left(10^2 mm\right)^2 =$$

$$0,0625\cdot 10^4 mm^2 = 625 mm^2$$

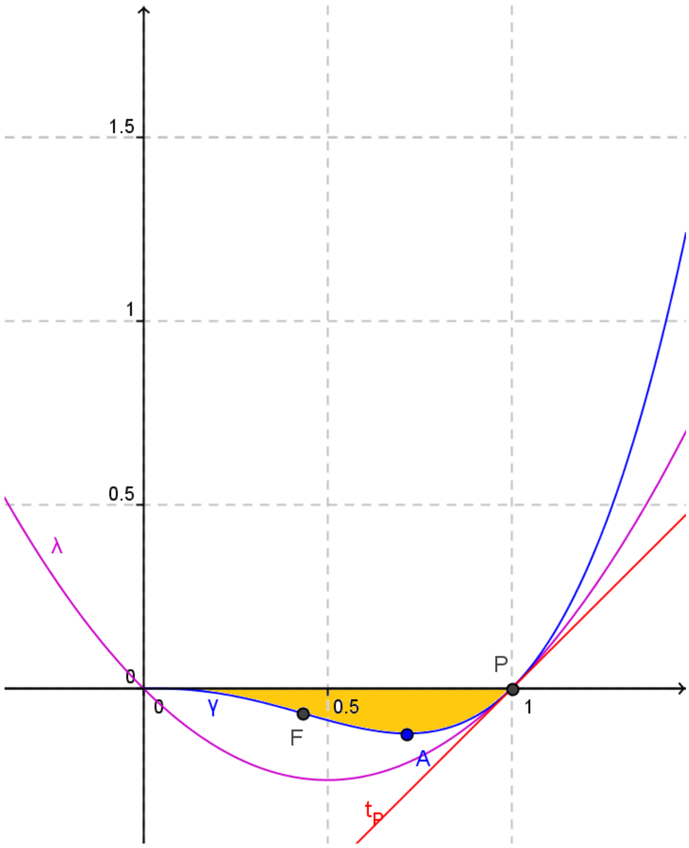

Figura 2

4. L'equazione della curva simmetrica di γ rispetto all'asse delle ordinate si ottiene semplicemente ponendo $-x$ in luogo di x. Detta γ' la curva ottenuta con la suddetta simmetria risulta

$\gamma': y=(-x)^3\ln(-x)$, da cui $\gamma': y=-x^3\ln(-x)$.

Detta γ'' la curva simmetrica della curva γ rispetto alla retta s:y=-1, ricordiamo che le equazioni della simmetria assiale avente per asse la retta s sono

$$\sigma_{y=-1}:\begin{cases} x'=x \\ y'=-y-2 \end{cases}$$

Ciò premesso, l'equazione di γ'' si ottiene ponendo $(-y-2)$ in luogo di y nell'equazione di γ. Quindi si ha:

$\gamma'': -y-2 = x^3\ln(x)$, da cui $\gamma'': y = -2 - x^3\ln(x)$.

In Figura 3 sono riportate tutte le curve elaborate nella risoluzione del problema affrontato.

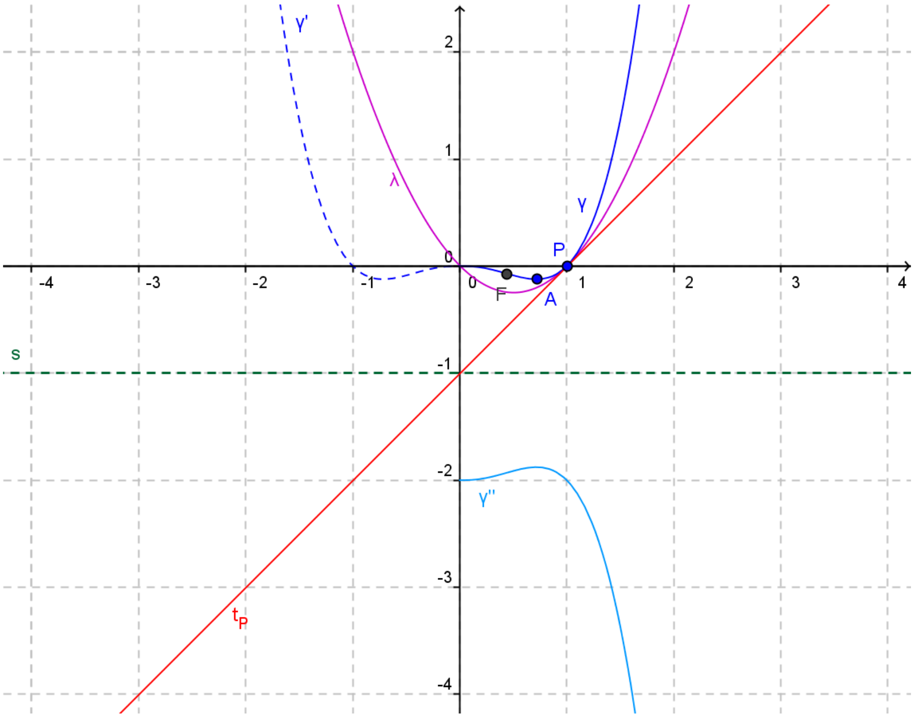

Figura 3