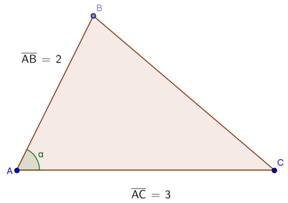
Risoluzione quesiti ordinamento

Quesito N.1

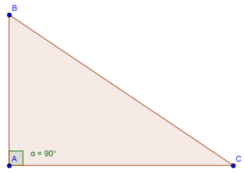
Indicata con α la misura dell'angolo CAB, si ha che:



$$Area(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \sin\alpha = 3 \cdot \sin\alpha$$

$$3 \cdot \sin\alpha = 3 \rightarrow \sin\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Il triangolo è quindi retto in A. La misura del terzo lato BC è pertanto: $\overline{BC} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.



Quesito N. 2

Determiniamo il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$

- $3 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$
- $\begin{cases} x \leq 3 \\ 2 - \sqrt{3 - x} \geq 0 \rightarrow \sqrt{3 - x} \leq 2 \rightarrow x \geq -1 \end{cases}$
- $\begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ 1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \end{cases}$

Quindi il dominio della funzione è: $D = \{x \in R / -1 \leq x \leq 2\}$

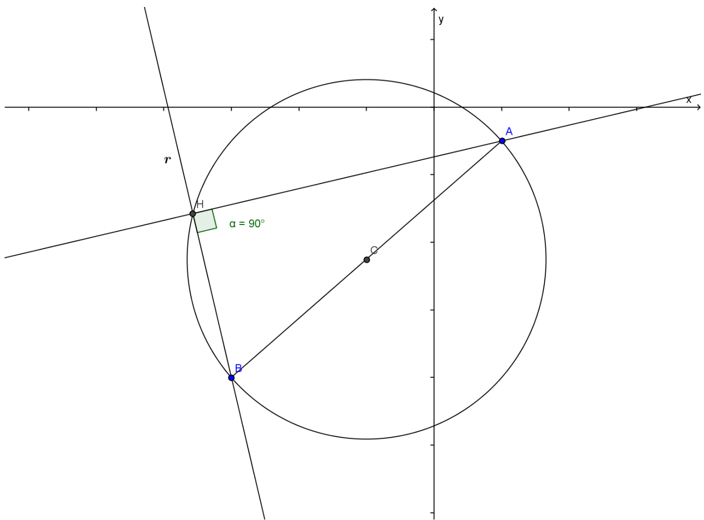
Quesito N.3

Consideriamo nel piano cartesiano i punti $A(2,-1)$ e $B(-6,-8)$. Vogliamo determinare l'equazione della retta passante per il punto B e avente massima distanza dal punto A.

Prima risoluzione

Indico con AH la distanza di A dalla retta generica r passante per il punto B. L'equazione della generica retta passante per B è: $y + 8 = m(x + 6)$

H appartiene alla circonferenza di diametro AB. Il massimo valore di AH si ha quando H coincide con B e quindi quando la retta r è tangente alla circonferenza in B.

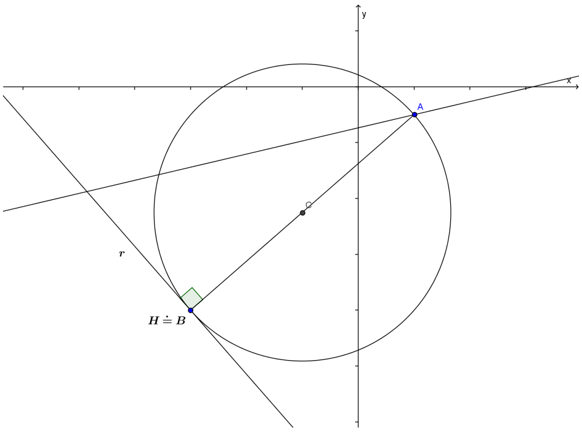


Determiniamo il coefficiente angolare della retta AB e deduciamo quello della retta r ad essa perpendicolare.

$$m(AB)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{7}{8}\rightarrow m(r)=-\frac{8}{7}$$

Equazione retta $r: y+8=-\frac{8}{7}(x+6)$

$$8x+7y+104=0$$



Seconda soluzione

Consideriamo l'equazione della generica retta r passante per il punto B: $y+8=m(x+6)$.

la distanza del punto A da tale retta è data da:

$$d(A,r)=f(m)=\frac{|8m-7|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Quindi:

$$f(m)=\frac{|8m-7|}{\sqrt{1+m^2}}=\begin{cases}\frac{8m-7}{\sqrt{1+m^2}}, m\geq\frac{7}{8}\\ -\frac{8m-7}{\sqrt{1+m^2}}, m<\frac{7}{8}\end{cases}$$

Studio la crescenza / decrescenza della funzione $f(m)$ continua in R, attraverso lo studio del segno della derivata prima.
Derivando si ottiene:

$$f'(m)=\begin{cases}\frac{7m+8}{(1+m^2)\sqrt{(1+m^2)}}, m>\frac{7}{8}\\ -\frac{7m+8}{(1+m^2)\sqrt{(1+m^2)}}, m<\frac{7}{8}\end{cases}$$ la funzione non è derivabile per $m=\frac{7}{8}$

Il segno della derivata prima è:

$f'(m)>0$ per $m<-\frac{8}{7}\vee m>\frac{7}{8}$

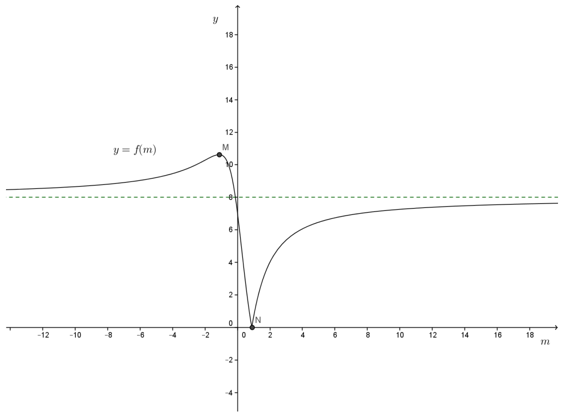
$f'(m)<0$ per $-\frac{8}{7}<m<\frac{7}{8}$

$f(m)$ presenta un massimo relativo per $m=-\frac{8}{7}$.

Poiché il $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|8m-7|}{\sqrt{1+m^2}}=8$ e $f\left(-\dfrac{8}{7}\right)=\sqrt{113}\cong 10.6$, possiamo concludere che la funzione $f(m)$ ha un massimo assoluto per $m=-\dfrac{8}{7}$.

Equazione retta è quindi: $8x+7y+104=0$.

Il grafico della funzione $f(m)$, **non richiesto**, è il seguente:

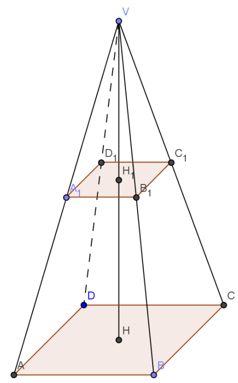


Quesito N.4

Determiniamo il volume del tronco di piramide.
Consideriamo il tronco di piramide che ha per basi il quadrato $ABCD$ di lato a e il quadrato $A_1B_1C_1D_1$ di lato b.

Indichiamo con h l'altezza del tronco di piramide HH_1 e con x la misura del segmento VH_1, quindi $VH=x+h$.

Il volume del tronco di piramide è dato dalla differenza tra il volume V della piramide $VABCD$ e il volume V' della piramide $VA_1B_1C_1D_1$.



$$V_{(t.p.)}=V-V'=\frac{a^2(h+x)}{3}-\frac{b^2\cdot x}{3} \;*$$

La piramide $VABCD$ e la piramide $VA_1B_1C_1D_1$ sono simili, quindi possiamo scrivere la seguente proporzione:

$$a:b=(x+h):x \to (a-b):b=h:x$$

$$\to x=h\cdot\frac{b}{a-b}$$

$$\to x+h=h\cdot\frac{a}{a-b}$$

Sostituendo nella * otteniamo:

$$V_{(t.p.)}=\frac{a^2(h+x)}{3}-\frac{b^2\cdot x}{3}=\frac{a^2}{3}\cdot h\cdot\frac{a}{a-b}-\frac{b^2}{3}\cdot h\cdot\frac{b}{a-b}=\frac{h}{3}\left[\frac{a^3}{a-b}-\frac{b^3}{a-b}\right]=\frac{h}{3}\left[\frac{a^3-b^3}{a-b}\right]$$

$$V_{(t.p.)}=\frac{h}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$$

Quesito N.5

Il volume iniziale della valigia è $V_0 = a \cdot b \cdot c$

Se ciascuna dimensione viene aumentata dell' $r\%$, si ha che:

$$a \rightarrow a + r\%a = a(1+r\%)$$

$$b \rightarrow b + r\%b = b(1+r\%)$$

$$c \rightarrow c + r\%c = c(1+r\%)$$

Il volume finale sarà pertanto:

$$V = a(1+r\%) \cdot b(1+r\%) \cdot c(1+r\%) = (1+r\%)^3 a \cdot b \cdot c = (1+r\%)^3 V_0$$

L'aumento percentuale sarà pertanto:

$$\frac{V - V_0}{V_0} \cdot 100 = \frac{(1+r\%)^3 V_0 - V_0}{V_0} \cdot 100 = \left[(1+r\%)^3 - 1\right] \cdot 100$$

Per $r\% = 10\%$, otteniamo per l'aumento percentuale: $\left[(1+10\%)^3 - 1\right] \cdot 100 \cong 33\%$

Per $r\% = 20\%$, otteniamo per l'aumento percentuale: $\left[(1+20\%)^3 - 1\right] \cdot 100 \cong 73\%$

Per $r\% = 25\%$, otteniamo per l'aumento percentuale: $\left[(1+25\%)^3 - 1\right] \cdot 100 \cong 95\%$, quasi il raddoppio.

Quesito N. 6

Se vogliamo disporre i numeri in ordine crescente il minore sarà: 1234567 mentre il maggiore sarà 7654321.

I numeri, una volta ordinati, si presenteranno prima con la cifra 1, poi con la cifra 2, …..Quanti sono i numeri che iniziano con la cifra 1? Sono tanti quanti sono le permutazioni delle cifre rimanenti, cioè 6!=720 .

Il numero più grande tra questi è: 1765432 (che occupa il 720 posto).

Il numero immediatamente successivo avrà come prima cifra 2 e sarà: 2134567 (occupa il 721 posto).

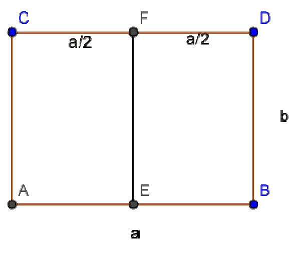
Per trovare il numero che occupa la settima posizione, osserviamo che se nel primo numero **12345**67 permutiamo le ultime due cifre abbiamo solo 2!=2 possibilità, se permutiamo le ultime tre cifre abbiamo 3!=6 possibilità.

Il numero che occupa la sesta posizione è: **1234**765. Quello immediatamente successivo, che quindi occupa la settima posizione, è: 1235467.

Quindi il numero che occupa la settima posizione è 1235467 mentre quello che occupa la 721 posizione è 2134567.

Quesito 7

Un foglio rettangolare, di dimensioni a, b ha area $1m^2$ e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di a, b?

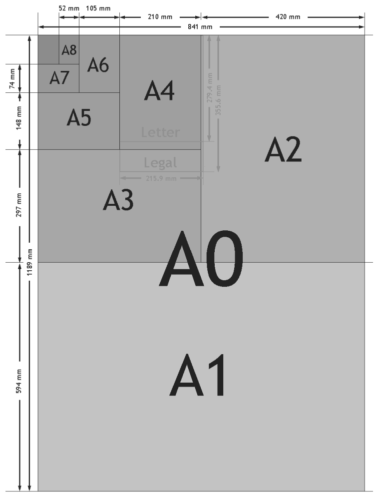


Con riferimento alla figura deve essere $a : b = b : \frac{a}{2}$ (significa che b è medio proporzionale tra a e $\frac{a}{2}$) da cui $a^2 = 2b^2$ ovvero $a = b\sqrt{2}$

Poiché è $a \cdot b = 1m^2$, è ancora $a^2 = \sqrt{2}m^2$, cioè $a = \sqrt[4]{2}m$ e conseguentemente $b = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}m$.

Osservazione

I numeri $\sqrt[4]{2}$ e $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ sono numeri irrazionali (in scrittura decimale, né limitati, né periodici) ma sono numeri *euclidei*, costruibili elementarmente con riga e compasso. Una calcolatrice però ci dà subito i valori adeguati alla precisione che vogliamo: $\sqrt[4]{2} = 1.189207115...$ e $\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = 0.8408964153...$

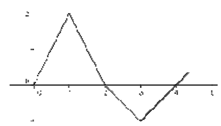


Perciò, arrotondando ai millimetri, $a = 1189mm$ e $b = 841mm$, che sono le misure richieste.

Nota:
Il problema è di grande rilevanza pratica. Infatti le dimensioni trovate sono quelle del formato capostipite della serie di formati stabiliti *dall'International Organization for Standardization* (cui è federato il nostro UNI- Ente Nazionale di Unificazione): proseguendo nel dimezzare il lato maggiore dei rettangoli simili si ottengono le misure che danno il formato alla carta da lettera, A4 (quarto dimezzamento, 210x297mm), al formato cartolina, A6 (105x148) e a tutti gli altri formati utilizzati comunemente nel mondo intero.
<u>Una novità</u>: dall'anno scolastico corrente anche il modello di diploma di scuola secondaria superiore si uniforma ai formati internazionali. Fino allo scorso anno aveva dimensioni, adesso, lo stabilisce la C.M. n. 2440 del 9 maggio 2013, sarà stampato nel formato A3 (297 x 420 mm)

Quesito 8

La funzione f ha il grafico in figura. Se $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, per quale valore positivo di x, g ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.



La risposta al quesito la cercheremo seguendo due diversi ragionamenti:

1. Per sapere se $g(x)$ ha un minimo dobbiamo guardare alla sua derivata $g'(x)$.

   Qual è $g'(x)$?

   Dal secondo teorema fondamentale del calcolo noi sappiamo che $\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x)$, dove c è una costante. Di qui segue che $g'(x) = f(x)$. Il grafico di f è zero in $x = 0, x = 2, x = 4$. In uno di questi punti ci può essere un minimo. Possiamo escludere $x = 0$ perché cerchiamo un valore positivo. Allora dal grafico vediamo che f è negativa a sinistra di $x = 4$ e positiva alla sua destra. Ciò equivale a dire che $g(x)$ ha un punto di minimo in $x = 4$.

2. Per trovare la risposta al quesito seguiamo ora la via geometrica. La funzione $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ [è anche detta *funzione di accumulazione*] rappresenta l'area della regione compresa tra la curva e l'asse x, da zero a x. Quindi il valore di $g(x)$ cresce da $x = 0$ a $x = 2$ ma da $x = 2$ a $x = 4$ l'area è al di sotto dell'asse x, è dunque negativa e la sottraiamo dalla prima. La funzione $g(x)$ decresce fino a $x = 4$ per poi cominciare di nuovo a crescere: in $x = 4$, $g(x)$ ha un minimo.

Quesito N. 9

Calcolare il $\lim_{x\to 0} 4\frac{\sin x\cos x - senx}{x^2}$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} 4\frac{\sin x\cos x - senx}{x^2} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^2} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} =$$

$$= 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos^2 x - 1)}{x^2(\cos x + 1)} = -4\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} = -4\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{\sin x}{(\cos x + 1)}\right] = 0$$

Il limite poteva anche essere calcolato applicando due volte il teorema di L'Hopital.

Quesito N. 10

La risposta corretta è la A in quanto è l'unico grafico nel quale la funzione è positiva $x < -2 \vee x > 2$ (dove la curva è crescente), negativa per $-2 < x < 2$ dove la curva è decrescente.