Le equazioni all’Esame di Stato

Prof. Ing. Luigi Verolino

Dipartimento di Ingegneria Elettrica e Tecnologie dell’Informazione

Via Claudio, 21 [80125] Napoli

verolino@unina.it

Tutto ciò che non si condensa in un’equazione non è scienza.

Albert Einstein

Sommario – L’antico, ma sempre attuale, problema della ricerca della soluzione, esatta oppure approssimata, delle radici di un’equazione e della valutazione del grado di precisione di siffatte radici è spesso presente agli Esami di Stato. In quel che segue questo classico problema verrà rivisitato, fornendo la soluzione di alcuni quesiti proposti agli esami finali per il Liceo Scientifico negli ultimi dieci anni.

Introduzione

La progressione degli studi matematici nella scuola secondaria superiore va di pari passo con lo studio di equazioni, algebriche o trascendenti, che diventano, anno dopo anno, sempre più difficili ed intriganti. Accade così che lo studente si imbatte prima nelle equazioni di primo grado, numeriche o letterali che siano, poi in quelle di secondo grado, poi in quelle logaritmiche ed esponenziali, infine in quelle trigonometriche, in cui per la prima volta scopre davvero che le soluzioni possono essere anche infinite. Tuttavia, mentre per le equazioni algebriche il grado, che è un numero naturale, informa sul numero finito delle rispettive radici, per le trascendenti, per le quali non ha senso definire il grado, può verificarsi anche, come per le funzioni periodiche, che le radici siano infinite. Solo durante l'ultimo anno del corso di studi il problema raggiunge la sua piena maturazione, quando si impara a rappresentare le equazioni graficamente, a separare le radici e poi ad applicare qualche tecnica numerica, utile per ottenere almeno approssimativamente una radice: si tratta di un argomento classico che si studia compiutamente solo quando si acquisiscono nozioni di calcolo infinitesimale. Lo studente viene, nel corso dei primi quattro anni, generalmente abituato ed allenato a risolvere esercizi concepiti appositamente per l'impiego di metodi di risoluzione esatta: si tratta per lo più di situazioni artificiose, come in una palestra attrezzata per sviluppare solo ben determinati muscoli. I tre esercizi che seguono approfondiscono questa tematica e, d'ora in poi e per tutto questo scritto, qualora si tratti di un quesito per lo scientifico PNI, verrà indicato esplicitamente, altrimenti si scriverà solo *Esame*, ponendo nell'ultimo numero l'indicazione del quesito.

Esempio 1 (Esame 2003 PNI – 6)

Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7$ *abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?*

L'equazione avrà tre radici reali se e solo se la funzione $f(x) = x^3 + bx - 7$, continua e derivabile ovunque, interseca per tre volte l'asse delle ascisse. Ciò comporta che la cubica deve possedere un massimo ed un minimo relativo di segni discordi. Ora, dato che

$$f'(x) = 3x^2 + b\,,$$

solo se b è negativo questa prima derivata avrà due radici distinte per $x = \pm\sqrt{-b/3}$ e la funzione cubica sarà, di conseguenza, crescente strettamente nell'intervallo

$$x < -\sqrt{-\frac{b}{3}} \quad \vee \quad x > \sqrt{-\frac{b}{3}}\,,$$

esibendo un massimo relativo nel punto

$$x_M = -\sqrt{-\frac{b}{3}}\,, \;\; f(x_M) = -\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3}} - 7 \left(> 0\,, \;\; \text{se} \;\; b < -\sqrt[3]{\frac{1323}{4}} \cong -6.9157 \right)$$

ed un minimo relativo nel punto

$$x_m = \sqrt{-\frac{b}{3}}\,, \;\; f(x_m) = \frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3}} - 7 \; (< 0\,, \;\; \text{dato che} \;\; b < 0)\,.$$

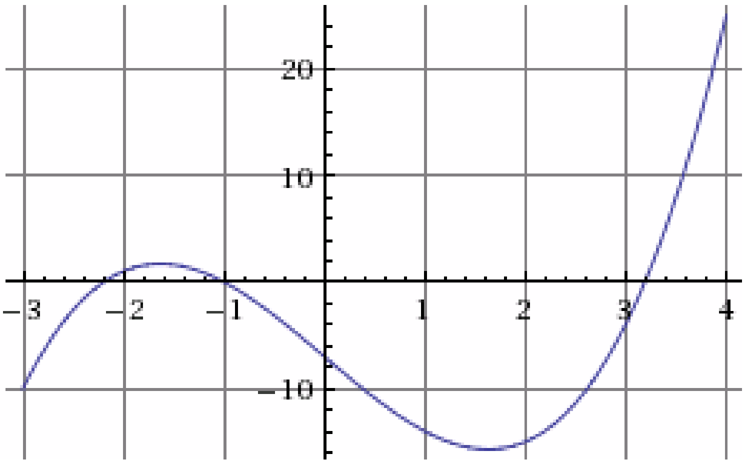
Posto, ad esempio $b = -8$, l'equazione diventa

$$x^3 - 8x - 7 = 0$$

e presenta le tre radici reali

$$x_1 = -1\,, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}\,, \quad x_3 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}\,,$$

come mostra chiaramente la figura di seguito riportata.



Tutti i grafici presentati in questo lavoro sono stati eseguiti con il programma *Wolfram Alpha*, un utile strumento, disponibile gratuitamente in rete, che può essere di grande aiuto nella didattica.

Esempio 2 (Esame 2006 PNI – 6)

L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos(2x) - 5k + 2 = 0$*, dove* k *è un parametro reale e* x *ha le seguenti limitazioni:* $15° < x < 45°$*. Si discuta per quali valori di* k *le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.*

Dal momento che

$$30° < 2x < 90° \quad \to \quad 0 < \cos(2x) < \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

si può dire, esplicitando il coseno nell'equazione assegnata, che

$$0 < \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ \ \text{essendo} \ \ k \neq 0 \, .$$

In definitiva, dal momento che

$$\begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 & \rightarrow \quad k < 0 \ \lor \ k > \dfrac{2}{5} = 0.4 \, , \\ \dfrac{5k-2}{k} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \rightarrow \quad 0 < k < \dfrac{4}{10-\sqrt{3}} \cong 0.4838 \, , \end{cases}$$

si stabilisce agevolmente che le radici dell'equazione data sono soluzioni del problema se

$$\frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}} \, .$$

Esempio 3 (Esame 2007 – 8)

Si risolva l'equazione:

$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3} \, .$$

Ricordando la definizione del coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \ , \ \ \text{con} \ \ n \geq k \ ,$$

si può scrivere per il primo membro dell'equazione data

$$4\binom{n}{4} = 4\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} \quad (n \geq 4),$$

e per il secondo membro

$$15\binom{n-2}{3} = 15\,\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3!} \quad (n-2 \geq 3 \quad \rightarrow \quad n \geq 5)\,.$$

Alla luce di quanto scritto, l'equazione, che ha significato solo per $n \geq 5$, diventa

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 15(n-2)(n-3)(n-4)\,,$$

che si può riscrivere nella forma fattorizzata equivalente

$$(n-2)(n-3)(n^2 - 16n + 60) = 0$$

ed ammette quattro radici distinte

$$n_1 = 2\,,\ \ n_2 = 3\,,\ \ n_3 = 6\,,\ \ n_4 = 10\,.$$

Ebbene, le prime due radici della lista riportata sono inaccettabili, essendo più piccole di 5, mentre le altre due risultano accettabili.

È ben noto tuttavia che, nelle varie situazioni problematiche in ambito matematico, accade spesso di non poter far uso di quei metodi. Quando non si conoscono metodi esatti per risolvere un'equazione è generalmente inevitabile ricorrere al metodo delle *approssimazioni successive*. I metodi approssimati per lo studio delle equazioni erano già conosciuti ed applicati dai Babilonesi per calcolare, ad esempio, le radici quadrate, algoritmo impropriamente attribuito al greco Archita (428 a.C. – 347 a.C.) oppure ad Erone, famoso matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C., e gli antichi egizi usavano sistematicamente il metodo della *falsa posizione* per la soluzione di equazioni algebriche. Metodi numerici furono successivamente reintrodotti da Isaac Newton (1642 – 1727) nel *Metodo delle flussioni* e nel *De Analisi*, proprio per il calcolo approssimato delle soluzioni delle equazioni: il metodo di Newton, applicato al caso particolare delle radici quadrate, si riduce al metodo dei babilonesi.

In quel che segue, dopo aver richiamato qualche essenziale nozione teorica, si riporta una raccolta di quesiti contenenti equazioni, algebriche o trascendenti, proposti negli ultimi dieci anni all'Esame di Stato per i licei scientifici, risolti e commentati in ordine di difficoltà crescente.

Prima però di entrare nel vivo della discussione, è opportuno ricordare che i calcoli vengono svolti da qualsiasi calcolatrice oppure elaboratore elettronico e sono sempre in *precisione finita*: i numeri reali sono rappresentati nei calcolatori secondo un sistema detto a virgola mobile normalizzata. Non si vuole qui descrivere nei dettagli questo metodo di rappresentazione, ma si desidera semplicemente osservare che è rappresentabile in macchina esattamente solo un sottoinsieme finito di reali. Tutti gli altri numeri sono affetti, sin dall'inizio, da un errore di rappresentazione che varia a seconda della precisione di macchina, cioè a seconda di quante cifre binarie siano adoperate per rappresentare ciascun reale. Un tipico valore per l'errore relativo è circa 10^{-7}, che, pur essendo piuttosto piccolo, può in alcuni casi creare seri problemi di calcolo. A seconda del contesto, cioè del metodo usato, dire che un valore x_0 è una soluzione approssimata di una certa equazione $f(x) = 0$ può voler dire sia che $|f(x_0)|$ è *piccolo* a sufficienza, sia che x_0 è *prossimo* alla soluzione esatta dell'equazione.

Infine, si tenga presente che queste pagine non vogliono costituire una trattazione dei metodi iterativi o di soluzione approssimata. Vogliono più modestamente essere di aiuto a tutti quegli studenti che desiderino imparare a risolvere un tipo di quesito che, abbastanza frequentemente, si presenta agli Esami di Stato.

Formulazione del problema

In molte applicazioni, si deve affrontar il problema di determinare le *radici* o *soluzioni* di un'equazione del tipo

$$f(x) = 0 ,$$

laddove $f(x)$ è una data *funzione reale*, algebrica o trascendente, della *variabile reale* x. È abbastanza raro il caso in cui si possono ottenere esattamente le radici, specialmente se la funzione presenta una notevole complessità. In alcuni problemi, oltre a ciò, i coefficienti dell'equazione sono conosciuti solo approssimativamente ed il problema della determinazione esatta delle radici perde praticamente significato. Per questo motivo la ricerca approssimata delle radici di un'equazione e la stima del grado di affidabilità delle stesse sono di particolare interesse.
Tuttavia, se non viene fatta altra ipotesi, il problema della determinazione delle radici è troppo generale, potendosi presentare tutte le circostanze: mancanza di radici, radici in numero finito, radici costituenti un insieme infinito.
Ecco, dunque, un'equazione che non presenta soluzioni.

Esempio 4 (Esame 2005 - 7)
Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$*, per quanti numeri reali* k *è* $f(k) = 2$*? Si illustri il ragionamento seguito.*

Posto $f(k) = 2$, il problema si può scrivere come la seguente equazione algebrica di quarto grado

$$k^4 - 4k^3 + 4k^2 + 1 = 0\,.$$

Il teorema fondamentale dell'algebra afferma che questa equazione possiede quattro radici, ma ora si mostrerà che non ha alcuna radice reale. In vero, dato che si può scrivere

$$k^4 - 4k^3 + 4k^2 + 1 = k^2(k^2 - 4k + 4) + 1 = k^2(k-2)^2 + 1,$$

l'equazione data si può pensare come la somma di due quantità: una sicuramente positiva, l'altra mai negativa. Pertanto, non si annulla per alcun valore di k reale.

Per le applicazioni, specialmente quelle assegnate all'Esame di Stato, ci si può limitare a equazioni particolari, vale a dire quelle i cui primi membri siano funzioni continue e derivabili più volte e che ammettono un numero finito di radici in ogni intervallo finito.
In queste ipotesi, la ricerca delle *radici isolate* di un'equazione si sviluppa in due fasi ben distinte:

- *separazione delle radici*, che consiste nel trovare intervalli, quanto più piccoli possibile, in cui sia presente una ed una sola radice;
- *determinazione delle radici approssimate*, vale a dire conseguimento di radici approssimate nei limiti imposti di precisione.

Sovente, se le radici dell'equazione non sono troppo ravvicinate, risulta più semplice cercare di scrivere $f(x)$ come differenza di due funzioni più semplici

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

e scrivere l'equazione nella nuova forma

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad g(x) = h(x).$$

Costruendo, allora, le due curve

$$y_1 = g(x), \;\; y_2 = h(x)\,,$$

si rendono visibili le radici cercate come ascisse dei punti di intersezione di queste due curve, come illustrano i due esempi che seguono.

Esempio 5 (Esame 2004 -4)

Dimostrate che l'equazione $\mathrm{e}^x + 3x = 0$ *ammette una ed una sola soluzione reale.*

Si ponga, per riformulare l'equazione,

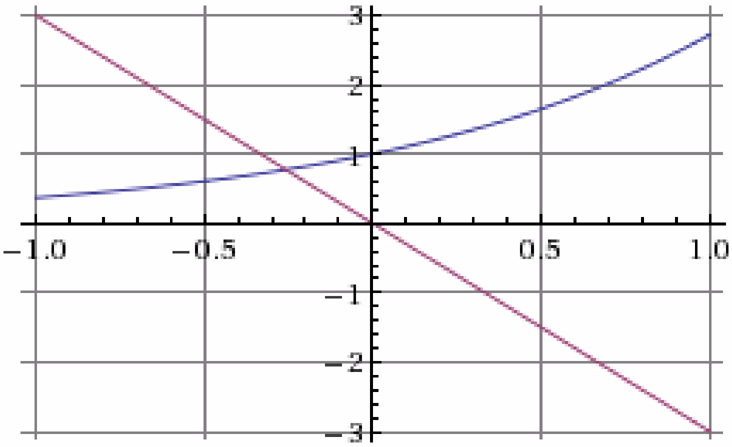
$$y_1 = \mathrm{e}^x \quad \mathrm{e} \quad y_2 = -3x\,.$$

Dal grafico che segue, in cui in blu è rappresentata la prima funzione ed in rosso la seconda, si evince immediatamente l'esistenza di una sola soluzione reale compresa nell'intervallo

$$-\frac{1}{2} < x_0 < 0\,,$$

che vale approssimativamente $x_0 \cong -0.257628$, tanto è vero che

$$e^{x_0} + 3x_0 \cong -1.3090 \cdot 10^{-6}\,.$$



Esempio 6 (Esame 2008 - 7)

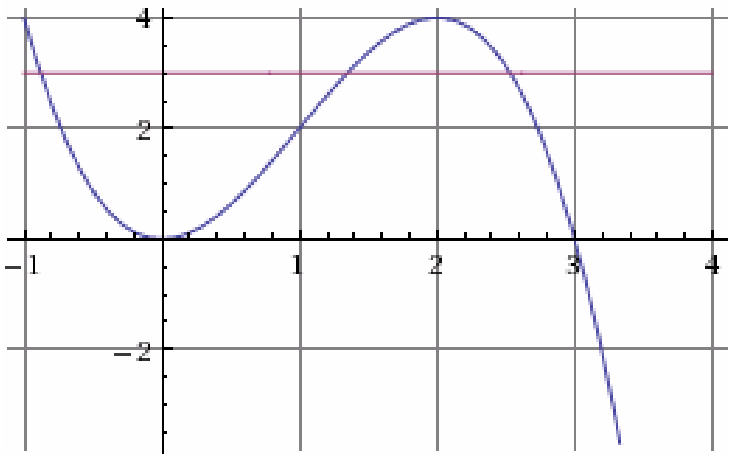
Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - 3x^2 + k = 0 \, .$$

Si tratta di una discussione parametrica, in cui è indispensabile separare, con intelligenza, in due parti l'equazione data. Di ciascuna parte, più o meno elementarmente, si disegna il grafico, per mezzo del quale si discute l'equazione. Nel caso in esame, posto

$$y_1 = 3x^2 - x^3 \, , \qquad y_2 = k \, ,$$

risolvere l'equazione vuol dire stabilire dove le precedenti due funzioni sono uguali. La prima è una funzione polinomiale, sempre definita e continua, con un minimo $m(0;0)$ ed un massimo $M(2;4)$; la seconda funzione è una costante. Entrambe sono rappresentate nel grafico che segue, la prima in blu, la seconda in rosso.



Dal grafico si deduce immediatamente che, facendo variare il parametro k, si ha:

- per $k < 0$, l'equazione ammette una sola radice reale, positiva e sempre maggiore di 3;
- per $k = 0$, l'equazione ammette tre radici reali, due coincidenti $x_1 = x_2 = 0$ e la terza $x_3 = 3$;
- per $0 < k < 4$, l'equazione ammette tre radici reali distinte, due positive ed una negativa;
- per $k = 4$, l'equazione ammette tre radici reali, due coincidenti $x_1 = x_2 = 2$ e la terza $x_3 = -1$;
- per $k > 4$, l'equazione ammette una sola radice reale, negativa e sempre minore di -1.

Separazione delle radici

Per ottenere la separazione delle radici, si ricorre al *Teorema degli zeri*, di seguito riportato:

se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $a \leq x \leq b$ ed agli estremi dell'intervallo assume valori di segno opposto in modo che $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora essa si annulla in almeno un punto interno all'intervallo.

Il procedimento, dunque, della separazione delle radici ha inizio con la determinazione dei segni della funzione agli estremi di un intervallo. Poi, si determinano i segni della funzione in qualche punto intermedio e, se in qualcuno di questi sotto-intervalli si verifica l'alternanza dei segni agli estremi, allora l'equazione $f(x) = 0$ ivi possiede almeno una radice. Infine, bisogna stabilire se questa soluzione è unica.

Orbene, se la funzione ammette derivata prima continua e le radici dell'equazione $f'(x) = 0$ si calcolano facilmente, l'operazione di verifica dell'unicità può essere semplificata. Si supponga, ad esempio, che si possa provare che

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x_1 < x < x_2 \,.$$

Allora, in questo intervallo la funzione è strettamente crescente e, se si verifica che agli estremi cambia segno, si può concludere che la curva $y = f(x)$ incontra l'asse x in un unico punto compreso nell'intervallo. Un esempio chiarirà ulteriormente quanto appena affermato.

Esempio 7 (Esame 2001 PNI - 5)

Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione: $x\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$.

Ricordando la definizione della funzione seno iperbolico

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \,,$$

l'equazione assegnata diventa

$$f(x) = 2x\cosh x - 2 = 0 \,.$$

Ora, dal momento che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

e che la prima derivata

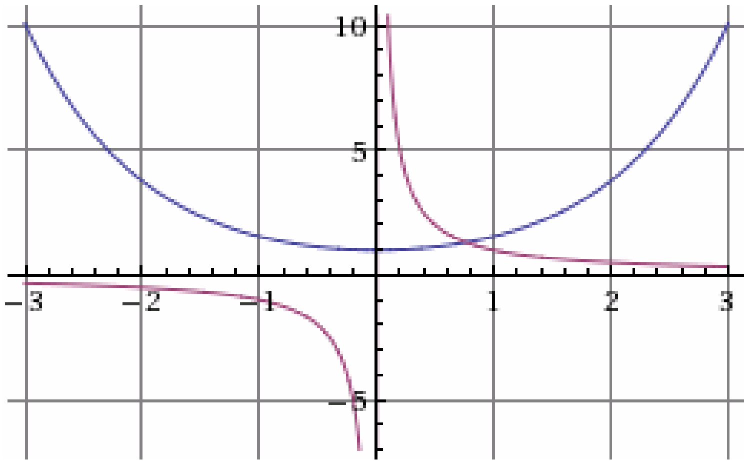
$$f'(x) = 2\cosh x + 2x \operatorname{senh} x > 0 \,, \quad \forall x \,,$$

si conclude che l'equazione possiede un'unica radice in $\mathbb{R}$. Atteso che $x = 0$ non è una sua radice, essa si può riscrivere nella forma equivalente

$$\cosh(x) = \frac{1}{x} \,, \;\; x \neq 0 \,,$$

dalla quale è immediato dedurre che per $x < 0$ non è presente alcuna soluzione, poiché il coseno iperbolico è positivo e l'iperbole è negativa.
Dunque, si cercherà una soluzione soltanto per valori positivi della x. Il grafico che segue mostra che esiste una sola soluzione, compresa tra 0.7 e 0.8 e che approssimativamente, come si potrebbe verificare applicando uno qualsiasi dei metodi che si illustreranno nel seguito, vale

$$x_0 \cong 0.7650 \,.$$



Qualora il segno della prima derivata non si stabilisca con semplicità, si può ricorrere al teorema di seguito enunciato:

sia $f(x)$ una funzione reale definita nell'intervallo $a \leq x \leq b$ e derivabile due volte; se in questo intervallo la seconda derivata $f''(x)$ non cambia segno e la funzione assume agli estremi dell'intervallo valori di segno opposto, allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette un'unica radice nell'intervallo considerato.

Un esempio chiarirà ed approfondirà quanto appena affermato.

Esempio 8 (Esame 2003 - 5)

La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

Introdotta la funzione definita ovunque

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2\,,$$

risulta immediatamente

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\,, \;\; f(0) = 2\,, \;\; f'(x) = 6x^2 - 6x\,, \;\; f''(x) = 12x - 6\,.$$

Da una sommaria analisi grafica si conclude che questa funzione, avendo massimo e minimo relativi, rispettivamente, nei punti

$$M(0;2) \;\; \text{e} \;\; m(1;1)\,,$$

è sempre positiva per $x > 0$. Ora, poiché si può scrivere

$$f''(x) = 12x - 6 < 0 \;\; \text{per} \;\; x < 0\,,$$

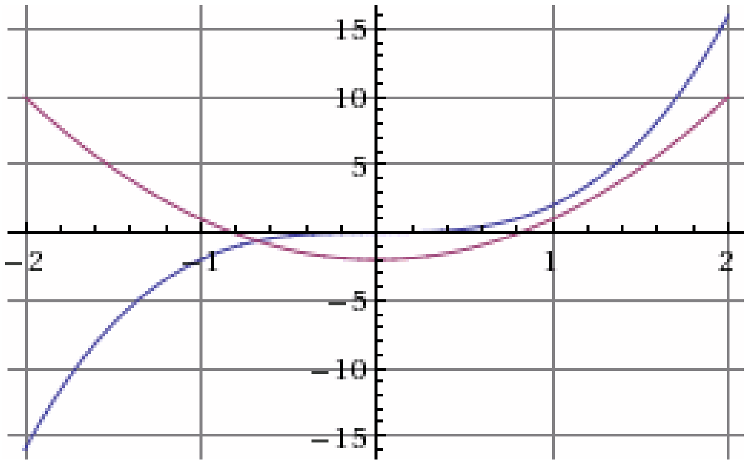
si conclude che presenta un'unica radice per $x < 0$, precisamente per $-0.7 < x < 0$, dato che risulta subito

$$f(-0.7) = -0.156 < 0\,, \;\; f(0) = 2 > 0\,.$$

Dopo aver separato, come d'abitudine, l'equazione data

$$2x^3 = 3x^2 - 2\,,$$

si può agevolmente disegnare sia la cubica, sia la parabola, come mostrato nella figura che segue.



Una buona approssimazione della radice, che si può determinare con un po' di pazienza e con un qualsiasi metodo numerico, vale

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{8}} + \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{8}} + \frac{1}{2} \cong -0.67765 \, .$$

Metodi delle approssimazioni successive

Il metodo più importante di risoluzione delle equazioni è il metodo delle approssimazioni successive, detto anche *metodo delle iterazioni*, del quale i metodi della tangente e della secante, che saranno esaminati nei paragrafi seguenti, sono esempi. Sia data l'equazione

$$f(x) = 0 \, ,$$

con $f(x)$ funzione continua: il problema è sempre quello di determinare le sue radici reali. Si sostituisca, allora, l'equazione data con una nuova equazione, ovviamente equivalente, del tipo

$$x = g(x) \, .$$

Ad esempio, se l'equazione da risolvere è $f(x) = x - \cos x$, allora la si può riscrivere subito $x = \cos x$.

Se con un qualunque mezzo si individua un valore approssimato x_1 della radice, anche largamente, portandolo al secondo membro, se ne può ricavare un altro

$$x_2 = g(x_1) \,.$$

Ripetendo il ragionamento, se ne può ottenere un terzo

$$x_3 = g(x_2) \,,$$

poi un quarto, un quinto, e così di seguito. Si ricava, in tal modo, una sequenza di numeri

$$x_1 \,, \quad x_2 \,, \quad x_3 \,, \quad x_4 \,, \quad \cdots \quad ,$$

definiti in maniera tale che il successivo si possa ricavare dal precedente secondo la relazione

$$x_{n+1} = g(x_n) \,.$$

Se questa successione è convergente, cioè se esiste il limite

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} x_n \,,$$

allora, passando al limite nella successione e supponendo $g(x)$ continua, si può scrivere

$$\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = g\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) \quad \to \quad \alpha = g(\alpha) \,.$$

Ciò prova che il numero α è una radice dell'equazione assegnata e che essa può calcolarsi per ricorrenza con la desiderata approssimazione.
Evidentemente, per potere applicare con successo questo metodo, bisogna stabilire preliminarmente che il processo sia convergente e, per questo, si enuncia una condizione sufficiente per la convergenza:

se la funzione $g(x)$ è definita e derivabile su tutto l'intervallo $[a;b]$ e se esiste un numero r tale che

$$|g'(x)| < r < 1 \quad per \quad a \leq x \leq b\,,$$

allora il processo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ converge indipendentemente dal valore iniziale scelto nell'intervallo considerato e

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} x_n$$

è l'unica radice dell'equazione $x = g(x)$ sull'intervallo $[a;b]$.

L'errore del valore approssimato x_n, trovato con il metodo iterativo, della radice α può essere valutato per mezzo della disuguaglianza

$$|\alpha - x_{n+1}| < \frac{r}{1-r}|x_{n+1} - x_n|\,,$$

dalla quale si ricava immediatamente che il valore approssimato della radice, in modo che l'errore commesso non superi ε, deve verificare la relazione

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1-r}{r}\varepsilon\,.$$

Per comprendere come si ricavi la disuguaglianza riportata, si applichi il *Teorema di Lagrange* alla funzione $g(x)$ ad un qualsiasi intervallo contenuto in $[a; b]$, in modo che

$$|g(\alpha) - g(\beta)| = |g'(\gamma)| \cdot |\alpha - \beta| < r\,|\alpha - \beta|\,,$$

con evidente significato dei simboli adoperati. Risulta allora la catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned}|\alpha - x_{n+1}| = |\alpha - x_{n+2} + x_{n+2} - x_{n+1}| &\leq |\alpha - x_{n+2}| + |x_{n+2} - x_{n+1}| \\ &< \ |g(\alpha) - g(x_{n+1})| + |g(x_{n+1}) - g(x_n)|\,,\end{aligned}$$

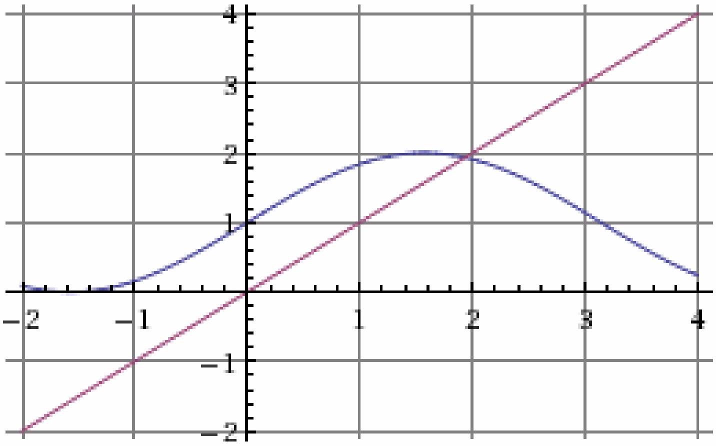
da cui si deduce che

$$|\alpha - x_{n+1}| < r|\alpha - x_{n+1}| + r|x_{n+1} - x_n| \quad \rightarrow \quad |\alpha - x_{n+1}| < \frac{r}{1-r}|x_{n+1} - x_n|\,.$$

Esempio 9 (Esame 2006 PNI – 4)

Si dimostri che l'equazione $\operatorname{sen} x = x - 1$ *ha una e una sola radice* α *e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare* α *con la precisione voluta.*

Se si pone $f(x) = \operatorname{sen} x - x + 1$, non è difficile verificare che $f(\pm\infty) = \mp\infty$ e che $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0\,, \forall x$. Per il teorema degli zeri l'equazione assume un'unica radice, che è collocata 1.5 e 2, come si evince dal grafico di seguito riportato.



Dunque, riscrivendo l'equazione assegnata nella forma $x = 1 + \operatorname{sen} x = g(x)$, si può trasformarla nel problema di punto fisso

$$x_{n+1} = 1 + \operatorname{sen}(x_n)\ ,\quad \text{con}\quad x_1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Risulta pure

$$|g'(x)| \leq |\cos 2| < 0.42 < 1\,.$$

Utilizzando, dunque, una qualsiasi calcolatrice tascabile, si può facilmente generare la sequenza:

$$x_2 = 2\,,\ \ x_3 = 1.9093\,,\ \ x_4 = 1.9433\,,\ \ x_5 = 1.9314\,,\ \ x_6 = 1.9357\,.$$

Procedendo con qualche iterazione ancora, si ottiene il risultato $\alpha \cong 1.93456$, con cinque decimali precisi.

Metodo di bisezione

È concettualmente il più semplice, applicabile a tutte le funzioni che verifichino le ipotesi di essere continue nell'intervallo $[a;\, b]$ ed abbiano valori di segno opposto agli estremi, le ipotesi, in fondo, del teorema degli zeri, che garantiscono l'esistenza di una radice. È opportuno che nell'intervallo $[a;\ b]$ esista una sola radice.

Si osservi che all'inizio si sa che la radice α sta nell'intervallo $[a;\ b]$, che chiameremo $[a_1;\ b_1]$, di ampiezza $b-a$. Si determina il punto medio dell'intervallo

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

e si calcola il valore della funzione in c_1. I casi possibili sono tre:

1) può essere $f(c_1) = 0$, nel qual caso la radice α è stata trovata e coincide con c_1;
2) si può avere che il segno di $f(c_1)$ è lo stesso di $f(a_1)$, nel qual caso la funzione si è mantenuta di segno costante nell'intervallo $[a_1,\ c_1]$ e non ha ancora cambiato segno, quindi non si è annullata, per cui la radice si trova nell'intervallo $[c_1,\ b_1]$, che si indicherà come $[a_2;\ b_2]$;
3) oppure la $f(c_1)$ può avere il segno di $f(b_1)$, diverso da quello di $f(a_1)$, e questo significa che, per poter cambiare di segno, la funzione si è annullata nell'intervallo $[a_1,\ c_1]$, che si indicherà, anche in questo caso, come $[a_2;\ b_2]$.

L'ampiezza del nuovo intervallo è, in ogni caso, metà di quella iniziale, cioè è $(b-a)/2$.

Si riparte con il nuovo intervallo e si procede allo stesso modo, definendo il punto medio e calcolando la funzione in tale punto, al fine di escludere, ancora una volta, una metà dell'intervallo di lavoro.

Dopo aver compiuto n passi, si lavorerà con l'intervallo $[a_n;\ b_n]$, di ampiezza $(b-a)/2^n$, nel quale si trova la radice cercata.

La convergenza del metodo è assicurata dal fatto che l'ampiezza dell'intervallo di incertezza, vale a dire dell'intervallo in cui si trova la radice, tende a zero al crescere di n verso l'infinito.

Non potendo compiere automaticamente, nemmeno con un elaboratore elettronico, infiniti passi, il procedimento deve arrestarsi dopo un numero finito di iterazioni. La radice potrà essere il punto medio dell'ultimo intervallo definito, accettato al verificarsi di una delle due condizioni

$$|f(c_n)| < \varepsilon \quad \text{oppure} \quad |b_n - a_n| < \varepsilon\,,$$

dove ε è una prefissata soglia di errore. La prima condizione significa accettare un valore della funzione non nullo, ma molto piccolo, che, presumibilmente, è assunto in un punto non lontano dalla radice. La seconda significa che l'intervallo di incertezza è diventato così piccolo che può essere identificato con il suo punto medio, approssimazione della radice α.

Per essere più chiari, si applichi il metodo di bisezione all'esempio che segue.

Esempio 10 (Esame 2004 PNI – 9)

Si dimostri che l'equazione $\mathrm{e}^x + 3x = 0$ *ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.*

La funzione $f(x) = \mathrm{e}^x + 3x$ è definita e continua su tutto l'asse reale e $f(\pm\infty) = \pm\infty$. Inoltre, la funzione è sempre derivabile, con derivata $f'(x) = \mathrm{e}^x + 3 > 0 \ \forall x$: la funzione è strettamente crescente e quindi, per il teorema degli zeri, si annulla una sola volta. Ora, dato che risulta

$$f(-1) = \mathrm{e}^{-1} - 3 < 0 \quad \text{e} \quad f\,(0) = 10\,,$$

si trova che la radice $-1 < \alpha < 0$. Applicando il metodo di bisezione, si ottiene lo schema di seguito riportato.

c	$f(c)$	α
-0.5	$-0.893 < 0$	$-0.5 < \alpha < 0$
-0.25	$+0.029 > 0$	$-0.5 < \alpha < -0.25$
-0.375	$-0.438 < 0$	$-0.375 < \alpha < -0.25$

Procedendo per approssimazioni successive, si ottiene $\alpha \cong -0.2576$.

Si noti che la successione costruita dal metodo ha due difetti fondamentali: non è monotona, e questo per un metodo numerico può rappresentare un problema di gestione, ma, soprattutto, sebbene si riduca ad ogni passo la dimensione dell'intervallo di incertezza, non è detto che la distanza dell'n-esimo punto calcolato dalla radice diminuisca ad ogni passo.

Per generare successioni con caratteristiche migliori, si possono considerare altri metodi, come quelli presentati in quel che segue, che hanno maggiore efficienza, ma che, ponendo ipotesi più restrittive, non si possono applicare a qualunque tipo di equazione.

Metodi delle tangenti

Si supponga che nell'intervallo considerato la funzione e le sue derivate prima e seconda esistano, siano continue e diverse da zero. Allora, per determinare la radice di un'equazione con il metodo delle tangenti, anche detto metodo di Newton-Raphson, occorre preliminarmente determinare l'esistenza degli zeri all'interno dell'intervallo $[a;\ b]$ e scegliere l'estremo, detto estremo di Fourier, da cui iniziare l'iterazione. Si definisce estremo di Fourier quello, fra i due estremi a, b, per cui il prodotto della funzione per la derivata seconda è positivo Sostituendo, poi, la funzione $y = f(x)$ con la retta tangente alla curva nel punto di ascissa $\gamma = a$ oppure$\gamma = b$, punti estremi dell'intervallo $[a;\ b]$, appartenenti al grafico della funzione:

$$y - f(\gamma) = f'(\gamma)(x - \gamma).$$

Fatto ciò, si passa a valutare il punto di intersezione della retta tangente alla curva, per il punto A oppure B, con l'asse x:

$$x = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}.$$

A questo punto, non resta che ripetere questa procedura più volte

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ \ , \ \text{con} \ \ n = 1, 2, 3, \cdots,$$

come illustra l'esempio che segue.

Esempio 11 (Esame 2009 – 8)

Si provi che l'equazione $x^{2009} + 2009x + 1 = 0$ *ha una sola radice compresa fra* – 1 *e* 0.

La funzione $f(x) = x^{2009} + 2009x + 1$, essendo una funzione polinomiale, è derivabile e quindi ovunque continua, in particolare, nell'intervallo $[-1;\ 0]$. Agli estremi dell'intervallo assume valori discordi, dato che

$$f(-1) =-1-2009 + 1 =-2009 \quad \text{e} \quad f(0) = 1\,.$$

Nell'intervallo $[-1;\ 0]$ la funzione ammette dunque almeno uno zero per il teorema di esistenza degli zeri. Inoltre, la prima derivata

$$f'(x) = 2009x^{2008} + 2009 = 2009(x^{2008} + 1)$$

risulta positiva per ogni $x \in \mathcal{R}$ e la funzione è dunque monotona crescente in $\mathcal{R}$ ed anche nell'intervallo $[-1;\ 0]$: si conclude che lo zero è unico.
Per determinarlo, si adoperi il metodo delle tangenti, per cui

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{2009} + 2009x_n + 1}{2009x_n^{2008} + 2009} = \frac{2008x_n^{2009} - 1}{2009x_n^{2008} + 2009}\ , \quad \text{con} \quad x_1 = 0\ .$$

Risulta, allora, la sequenza, che mostra una rapidissima convergenza,

$$x_2 = 4.9776 \cdot 10^{-4}\ , \quad x_3 = 4.9776 \cdot 10^{-4}\ .$$

Con le ipotesi poste, si dimostra che la successione delle x_n converge alla radice.
Nella pratica, fissata la tolleranza di approssimazione consentita ε, il procedimento iterativo si fa terminare quando

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon\ .$$

Metodo delle secanti

Nel metodo delle secanti, anche detto metodo delle corde, si sostituisce alla funzione $y = f(x)$ la retta passante per i punti A e B, punti estremi dell'intervallo $[a;\ b]$, appartenenti al grafico della funzione. Ad ogni iterazione del procedimento il risultato si approssima sempre di più allo zero cercato.

Dopo aver determinato l'esistenza degli zeri all'interno dell'intervallo $[a;\, b]$, bisogna sostituire la funzione $y = f(x)$ con la retta passante per i punti A e B, appartenenti al grafico della funzione, cioè

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}\,.$$

Fatto ciò, si passa a determinare il punto di intersezione della retta passante per il punto A e B con l'asse x, sicché

$$x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}\, f(a)\,.$$

Non resta ora che iterare il procedimento secondo la formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)}\, f(x_n)\,, \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

come mostra l'esempio qui di seguito discusso.

Esempio 12 (Esame 2007 PNI – 9)
Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ *ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.*

Si consideri la funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6$. Cercare le soluzioni reali dell'equazione data equivale a cercare le intersezioni della funzione $f(x)$ con l'asse delle ascisse. Poiché la funzione è continua in $\mathcal{R}$ ed esistono due valori di x in cui la funzione cambia di segno, ovvero

$$f(0) = 6 \;\text{ e }\; f(-1) = -5\,,$$

per il teorema di esistenza degli zeri si può concludere che esiste almeno un punto, interno all'intervallo $[-1;\ 0]$, in cui la funzione si annulla. Si passa, dunque, a determinare la prima derivata di $f(x)$, ottenendo

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6 = 6(x^2 - x + 1)\,.$$

Si osserva che il trinomio $x^2 - x + 1 > 0$ per ogni valore di $x \in \mathcal{R}$. Pertanto, la funzione è strettamente crescente in $\mathcal{R}$ e si conclude che esiste una sola radice dell'equazione di partenza, localizzata nell'intervallo $[-1;\ 0]$. Per calcolare tali radici utilizziamo il metodo delle secanti, tenendo conto che, nell'intervallo $[-1;\ 0]$ la derivata seconda vale

$$f''(x) = 12x - 6$$

ed è qui negativa, come $f(-1)$. Vale di conseguenza la formula ricorsiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-x_n}{-2x_n^3 + 3x_n^2 - 6x_n}\,(2x_n^3 - 3x_n^2 + 6x_n + 6) = \frac{6}{-2x_n^2 + 3x_n - 6}\,.$$

Posto $x_1 = -1$, estremo di Fourier (quello, fra i due estremi, in cui il prodotto della funzione per la derivata seconda è positivo), si ottiene la tabella che segue.

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-0.5455	-0.7289	-0.6487	-0.6828	-0.6681	-0.6744	-0.6717

Si osserva che a partire da x_7 comincia ad essere stabile la cifra dei centesimi. Pertanto, il valore della radice con una precisione di due cifre significative, è

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{79}}{4} - \frac{17}{8}} + \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{79}}{4} - \frac{17}{8}} + \frac{1}{2} \cong -0.67\,.$$

La soluzione riportata dopo il segno di uguale è quella ottenuta mediante la formula, scoperta dal Tartaglia, ma attribuita a Cardano, per la soluzione analitica delle equazioni algebriche di terzo grado.

Si può dimostrare che se nell'intervallo considerato la funzione, continua con le sue derivate prima e seconda, che non devono cambiar segno, ossia se in tutti i punti dell'intervallo la funzione si mantiene crescente o decrescente e se la sua curva si mantiene concava verso l'alto o verso il basso, ovvero se non presenta né massimi, né minimi, né flessi, allora la successione dei valori x_n converge alla radice cercata.

Conclusioni

I quesiti assegnati agli Esami di Stato negli ultimi dieci anni costituiscono un ottimo banco di prova per discutere dei metodi numerici per la soluzione approssimata delle equazioni, siano esse algebriche o trascendenti. Questo tema è molto sentito nelle diverse applicazioni e nella società della *Information and Communication Technology* (ICT) meriterebbe un approfondimento maggiore. Le pagine precedenti costituiscono un buon punto di partenza per consentire l'approfondimento a tutti quegli studenti che continueranno i loro studi universitari in discipline tecnico-scientifiche. Comunque, qualche considerazione finale va sviluppata.

Anzitutto, si ricordi sempre che il quesito assegnato può avere una soluzione esatta e non richiedere l'uso di metodi approssimati, come ribadisce l'esempio che segue.

Esempio 13 (Esame 2009 – 3)

Per quale o quali valori di k la curva di equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ *ha una sola tangente orizzontale?*

La famiglia è composta da curve tutte derivabili e quindi ovunque continue; i punti a tangente orizzontale sono i punti nei quali la tangente ha coefficiente angolare nullo. Si tratta, quindi, di trovare i punti le cui ascisse annullano la derivata prima $f'(x) = 3x^2 + 2kx + 3$. La derivata si annulla una sola volta se e solo se l'equazione

$$3x^2 + 2kx + 3 = 0$$

ha discriminante nullo, cioè se e solo se

$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - 9 = 0\,,$$

ovvero per $k = -3$ e per $k = 3$.

Si faccia, poi, attenzione alla corretta applicazione del teorema degli zeri, come ricorda l'esempio che ci si accinge a discutere.

Esempio 14 (Esame 2006 – 8)

La funzione $f(x) = \tan x$ *assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo* $I = [\pi/4; 3\pi/4]$, *eppure non esiste alcun* $x \in I$ *tale che* $f(x) = 0$. *È così? Perché?*

La funzione $f(x) = \tan x$ non è continua sull'intervallo I, perché non è definita per $x = \pi/2$, in cui presenta una discontinuità di seconda specie, essendo

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{\pm}} \tan x = \mp\infty .$$

Quindi, per siffatta funzione non è applicabile il teorema di esistenza degli zeri, in cui un'ipotesi essenziale è la continuità della funzione in ogni punto dell'intervallo chiuso e limitato. Non c'è, pertanto, alcuna contraddizione.

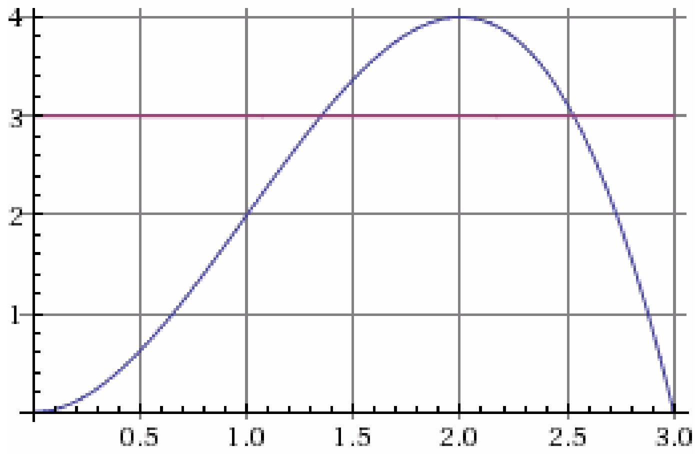
Una buona scelta del punto iniziale, il seme, come viene detto in gergo, è comunque sempre utile per ridurre il numero di iterazioni ed ottenere nel minor numero di passi la soluzione che soddisfi una data approssimazione.

Esempio 15 (Esame 2013 PNI – 5)
Si stabilisca per quali valori $k \in \mathcal{R}$ *l'equazione* $x^2(3-x) = k$ *ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo* $[0,3]$*. Posto* $k = 3$*, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.*

Posto, anzitutto,

$$y = x^2(3-x) ,$$

non è difficile rappresentare questa funzione polinomiale e verificare graficamente che, nell'intervallo $0 \leq x \leq 3$, presenta un massimo nel punto $M(2;4)$ ed una qualsiasi retta parallela all'asse del tipo $y = k$, con $k \leq 4$, la interseca in due punti distinti, uno con ascissa inferiore a quella del massimo, l'altro con ascissa superiore.



Nel caso particolare $k = 3$, concentrandosi sulla radice posta al di là del massimo, si può scrivere il seguente processo iterativo

$$x_{n+1} = g(x_{n-1}) = 3 - \frac{3}{x_n^2},$$

in cui la funzione $g(x) = 3 - 3/x^2$ è una contrazione, dato che

$$0 < g'(x) = \frac{6}{x^3} \leq \frac{1}{8}, \quad \text{per} \quad 2 \leq x \leq 3 .$$

Posto, allora, $x_1 = 2.5$, si ottiene la successione di valori

$$x_2 = 2.52 , \qquad x_3 = 2.5276 , \quad x_4 = 2.5304 , \quad x_5 = 2.5315 .$$

Dopo la quinta iterazione, si nota che le prime due cifre decimali si sono stabilizzate, fornendo la soluzione

$$\alpha = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \cong 2.532 .$$

Va, infine, dato merito agli organi tecnici del Ministero preposti alla preparazione dei testi che, tra le innumerevoli equazioni esaminate, soltanto il quesito che segue presenta una imprecisione nella traccia.

Esempio 16 (Esame 2005 PNI – 5, sessione suppletiva)

Si dimostri che l'equazione $\mathrm{e}^x - x^3 = 0$ *ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte*

Dopo qualche riflessione, ci si rende conto che il testo del quesito è inesatto, poiché si verifica agevolmente che l'equazione assegnata ammette più di una radice reale nel suo campo di esistenza, cioè $\mathcal{R}$, pur di visualizzarla in un intervallo sufficientemente esteso. Nel grafico che si mostra di seguito si è rappresentato la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x^3 \,,$$

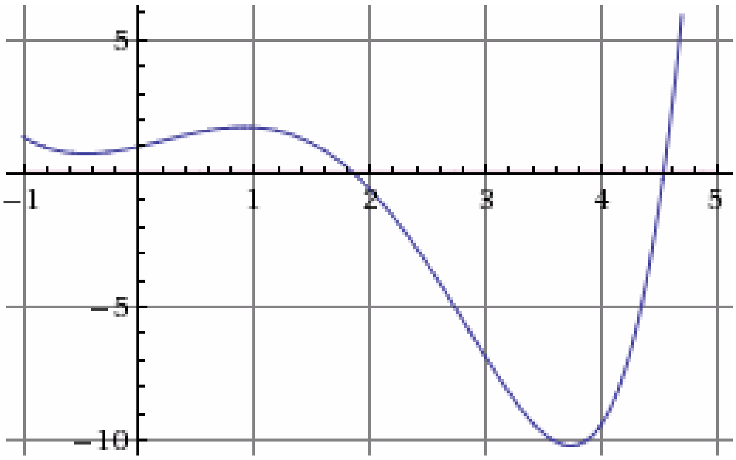
continua ovunque e da esso si può dedurre agevolmente che la curva intercetta l'asse x un po' prima di 2 e un po' dopo 4.5. Precisamente, dato che risulta

$$f(1) = \mathrm{e} - 1 > 0 \quad \mathrm{e} \quad f(2) = \mathrm{e}^2 - 8 < 0 \,,$$

per il teorema degli zeri esiste almeno una radice reale nell'intervallo $1 < x < 2$. Similmente, dato che

$$f(4) = \mathrm{e}^4 - 64 < 0 \quad \mathrm{e} \quad f(5) = \mathrm{e}^5 - 125 > 0 \,,$$

esiste anche un'altra radice reale nell'intervallo $4 < x < 5$.



Per determinare più precisamente le radici, con l'aiuto di un elaboratore elettronico e di qualche metodo numerico, si trova in pochi minuti che le due soluzioni, approssimate alla terza cifra decimale, valgono

$$x_1 \cong 1.857\,, \quad x_2 \cong 4.536\,.$$