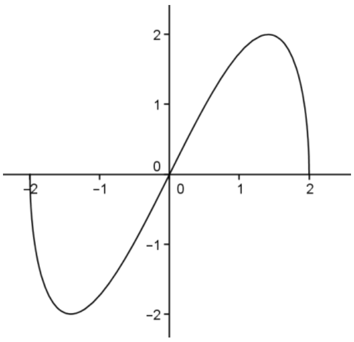
PROBLEMA 1

A lato è disegnato il grafico Γ della funzione

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2} \quad .$$



1. Si calcoli il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.
2. Si provi che l'origine è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.
3. Si disegni la curva d'equazione $y^2 = x^2(4 - x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.
4. Si consideri il solido W che la regione delimitata da Γ e dall'asse x genera nella rotazione attorno all'asse x. Si calcoli il volume di W.

Soluzione

1. Essendo f(x) una funzione continua, per il teorema di Weierstrass ammette minimo e massimo assoluto nell'intervallo chiuso e limitato $[-2; 2]$.

Il grafico suggerisce che sia il minimo , sia il massimo assoluto coincidono, rispettivamente, con il minimo e il massimo relativo;il loro valore può essere determinato studiando il segno della derivata prima $f'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ i cui zeri sono $x = \pm\sqrt{2}$.

Segno di $f'(x)$

-2 ___________ $-\sqrt{2}$ ______________________ $+\sqrt{2}$ ______________ 2

-------------- +++++++++++++++++++ ------------------

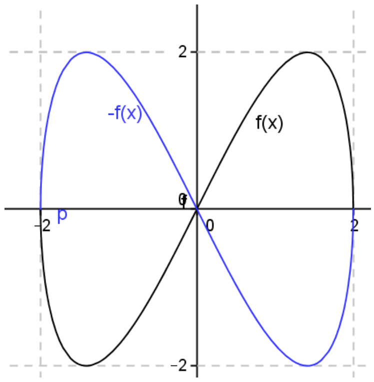
Pertanto f(x) è decrescente per $-2 < x < -\sqrt{2}$ e per $\sqrt{2} < x < 2$, crescente per $-\sqrt{2} < x \leq \sqrt{2}$

Il punto di coordinate $\left(-\sqrt{2}\,; -2\right)$ è $punto\ \ di\ minimo\ relativo\ e\ assoluto$
Il punto di coordinate $\left(\sqrt{2}\,; 2\right)$ è $punto\ \ di\ massimo\ relativo\ e\ assoluto$

2. O è centro di simmetria per Γ in quanto l'equazione $y = f(x)$ rimane invariata applicando le trasformazioni (equazioni della simmetria rispetto ad O)

$$\begin{cases} y' = -y \\ x' = -x \end{cases}$$

Infatti $-y' = -x'\sqrt{4 - (-x')^2} = -x'\sqrt{4 - x'^2} \rightarrow y' = x'\sqrt{4 - x'^2}$



Per rispondere all'altra domanda calcoliamo $f'(0) = 2$

L'ampiezza dell'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x è $\alpha = \tan^{-1}(2) \cong 63°26'$

3. La curva γ d'equazione $y^2 = x^2(4 - x^2)$ è l'unione della curva Γ e della sua simmetrica rispetto all'asse x.
   Poiché a sua volta Γ è simmetrica rispetto all'origine, l'area richiesta equivale al quadruplo dell'area della regione appartenente al primo quadrante.

Area racchiusa

$4\int_0^2 x\sqrt{(4-x^2)}\,$dx=4$\left[-\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3} \cong 10.67$

4. La regione delimitata da Γ e dall'asse x è costituita da due regioni simmetriche rispetto all'origine O, appartenenti al primo e terzo quadrante, rispettivamente, che generano , nella rotazione intorno all'asse x, due solidi di uguale volume.

Il volume del solido W pertanto è uguale a $2 * \pi \int_0^2 (f(x))^2 dx \;=\; 2 * \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4)\, dx =$

$$2 * \pi \left[4\,\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 \;=\; 2\pi\frac{64}{15} \cong 26.81$$