M557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

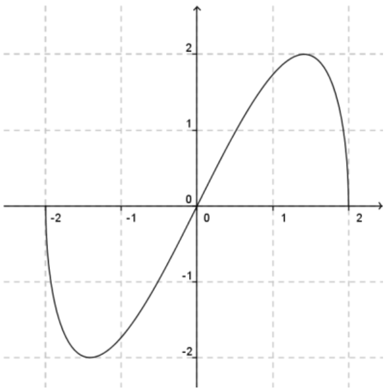
Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Problema 2

A lato è disegnato il grafico Γ della funzione

$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$



1. Si calcolino il massimo ed il minino assoluti di $f(x)$.
2. Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse *x*.
3. Si disegni la curva d'equazione $y^2 = x^2(4-x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.
4. Sia $h(x) = sen(f(x))$ con $0 \le x \le 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di *k* l'equazione $h(x) = k$ ha quattro soluzioni distinte?

Soluzione

1. La funzione in oggetto, irrazionale intera, è definita per i valori che rendono non negativo l'argomento del radicale, dunque se $4-x^2 \ge 0$; la condizione è soddisfatta nell'intervallo [-2;2].

   La funzione nel dominio di definizione è continua e per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti. La funzione derivata prima è

$$f'(x) = 1\cdot\sqrt{4-x^2} + x\cdot\frac{1\cdot(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

   Si riconosce che la funzione è derivabile in ogni punto del dominio con esclusione dei punti estremi x=-2, x=2. La derivata prima si annulla nei due punti $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$ e poiché risulta $f'(x) > 0$ per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, nonché $f'(x) < 0$ per $(-2 < x < -\sqrt{2}) \vee (\sqrt{2} < x < 2)$ deduciamo che il punto $x_1 = -\sqrt{2}$ è di minimo relativo proprio, ma anche assoluto, con $f(-\sqrt{2}) = -2$ ed il punto $x_2 = \sqrt{2}$ è di massimo relativo proprio, nonché assoluto, con $f(\sqrt{2}) = 2$.

2. La funzione $y = f(x)$ è dispari perché per ogni x del suo dominio verifica la condizione $f(-x) = -f(x)$ e ciò implica che il suo diagramma è simmetrico rispetto all'origine O degli assi cartesiani. Quindi è vero che O è centro di simmetria per Γ.

Ampiezza dell'angolo formato dalla retta tangente a Γ nell'origine degli assi con il semiasse positivo delle ascisse

Osserviamo che $f'(0) = 2$ e dunque l'equazione della retta tangente nell'origine degli assi è y=2*x*. Ricordando il significato di coefficiente angolare di una retta, detto α l'angolo formato dalla suddetta tangente con il semiasse positivo delle ascisse, risulta $tg\alpha = 2$, da cui si ottiene l'ampiezza

$$\alpha = arctg(2) \approx 63°26'6''.$$

3. La curva piana Γ^* di equazione $y^2 = x^2(4-x^2)$ è l'unione dei diagrammi delle due funzioni $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$, $g(x) = -x\sqrt{4-x^2}$ ed è rappresentata in Figura 1.

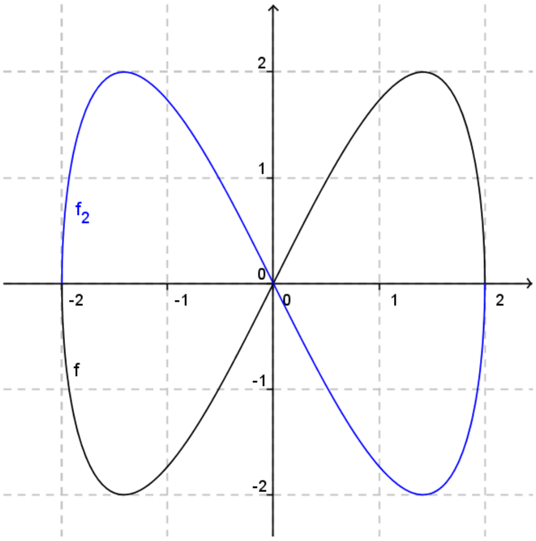


Figura 1

La curva Γ^* è chiusa ed è simmetrica rispetto ai due assi cartesiani; l'area S della regione piana delimitata da Γ^* è pari a quattro volte l'area S_1 della regione delimitata dal diagramma di $y = f(x)$ con l'asse delle ascisse situata nel primo quadrante. L'area S_1 vale:

$$S_1 = \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 -2x\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2 = -\frac{1}{3}\left[0-4^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3}$$

Concludiamo che $S = 4S_1 = \dfrac{32}{3}$.

4. Consideriamo la funzione $h(x) = sen(f(x))$, con $0 \le x \le 2$, quindi

$$h(x) = sen\left(x\sqrt{4-x^2}\right).$$

Punti del grafico di *h*(*x*) di ordinata 1

Risulta *h*(*x*)=1 se e solo se l'argomento della funzione seno vale $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in Z$. Tenendo presente che il codominio della funzione $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ con $0 \le x \le 2$ è l'intervallo [0;2] riconosciamo che solo $\frac{\pi}{2}$ appartiene a detto intervallo, quindi i punti del grafico di $y = h(x)$ aventi ordinata 1 sono solo quelli di intersezione tra la retta $y = \frac{\pi}{2}$ e il diagramma della funzione $y = f(x)$.

Risolvendo l'equazione $x\sqrt{4-x^2} = \frac{\pi}{2}$ nell'intervallo $0 \le x \le 2$, equivalente all'equazione biquadratica $4x^4 - 16x^2 + \pi^2 = 0$, si trovano le due soluzioni $c_1 = \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{2}} \approx 0{,}8729$, $c_2 = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{2}} \approx 1{,}7995$.

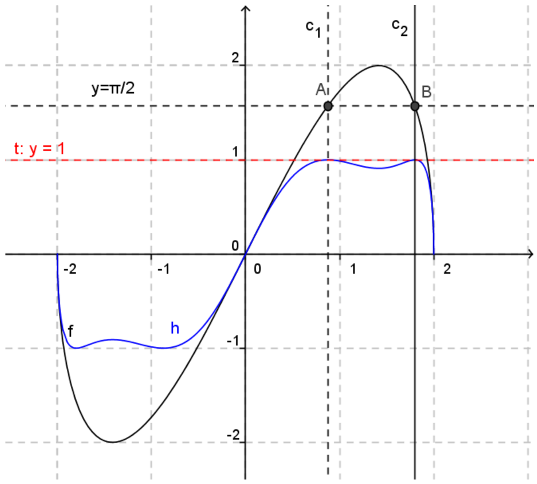


Figura 2-Il diagramma della funzione y=h(x) è rappresentato con colore blu.

Esistono dunque solo due punti del diagramma della funzione $y=h(x)$ aventi ordinata 1. In Figura 2 sono indicati con A e B e le loro ascisse sono rispettivamente c_1, c_2.

Analisi dei valori della funzione y=*h*(*x*)

Precisiamo che i valori della funzione $f(x)$ vanno considerati in radianti. Ciò detto, con $0 \le x \le c_1$ la funzione $f(x)$ descrive l'intervallo $[0;\pi/2]$ ed è strettamente crescente; osserviamo che anche sen$x$ è strettamente crescente nell'intervallo $[0;\pi/2]$ e dunque la funzione composta $h(x)$ nell'intervallo $[0;c_1[$ è ancora strettamente crescente. Con $c_1 < x < \sqrt{2}$ la funzione $f(x)$, ancora strettamente crescente, descrive l'intervallo $\left]\frac{\pi}{2};2\right[$, la funzione $h(x)$ è strettamente decrescente e descrive l'intervallo]sen(2);sen(π/2)[. La funzione $h(x)$ raggiunge il suo minimo relativo per $x = \sqrt{2}$.

Con $\sqrt{2} < x < c_2$ la funzione $f(x)$ è strettamente decrescente ed i suoi valori descrivono l'intervallo $\left]\frac{\pi}{2};2\right[$ e tenendo presente che anche la funzione seno nell'intervallo $\left]\frac{\pi}{2};2\right[$ è strettamente decrescente si deduce che la funzione composta $y=h(x)$ in $\sqrt{2} < x < c_2$ è strettamente crescente e descrive l'intervallo]sen(2);sen(π/2)[, dunque nel punto $x=c_2$ la funzione $h(x)$ riassume il valore 1.

Con $c_2 \le x \le 2$ i valori della funzione $f(x)$, strettamente decrescente, descrivono l'intervallo $[0;\pi/2]$ e i valori della funzione $y=h(x)$ descrivono in forma decrescente i punti dell'intervallo [0;1], con il valore massimo 1 (uno) assunto per $x=c_2$ ed il valore minimo zero assunto per $x=2$.

Dalla descrizione dei valori della funzione $y=h(x)$ si deduce che l'equazione $h(x)=k$ ha quattro soluzioni distinte se e solo se si assegnano a k valori dell'intervallo]sen(2);1[.

Sui punti di massimo e di minimo della funzione *h*(*x*)

La funzione $h(x)$, limitatamente all'intervallo [0;2]

- assume il suo **minimo assoluto** in ciascuno dei punti x=0, x=2 ed il valore è zero,
- assume il massimo assoluto, e vale uno, in ciascuno dei punti $x=c_1$, $x= c_2$,
- nel punto $x=\sqrt{2}$ assume un minimo relativo ed il valore è sen(2).

Commento al problema

Considerazioni sui singoli quesiti

1. Il quesito si risolve abbastanza agevolmente; i calcoli sono di facile esecuzione. Non è necessario studiare completamente la funzione per riconoscere quali siano il valore massimo ed il valore minimo, è sufficiente fermarsi alla derivata prima e tenere presente che la funzione si annulla nei punti x=0, x=-2, x=2.
2. Per questo quesito è sufficiente ricordare il significato geometrico del valore della derivata prima in un punto per rispondere alla richiesta.
3. Per questo quesito, una volta riconosciuta la simmetria rispetto all'origine degli assi del diagramma della funzione y=$f(x)$ e che l'equazione cartesiana della curva $y^2=x^2\left(4-x^2\right)$ è equivalente all'unione logica $\left(y=x\sqrt{4-x^2}\right)\vee\left(y=-x\sqrt{4-x^2}\right)$ si riesce a tracciare immediatamente la curva corrispondente.
4. La risoluzione di questo quesito richiede che lo studente sappia operare con le funzioni composte ed in particolare sappia riconoscere il tipo di monotonia di una funzione ottenuta componendo due funzioni strettamente crescenti o due funzioni strettamente decrescenti o due funzioni una strettamente crescente ed una strettamente decrescente. Per la risoluzione completa non è affatto necessario accingersi ad eseguire lo studio della funzione y=$h(x)$. Alle competenze sulla monotonia di funzioni composte da funzioni monotòne si devono affiancare le conoscenze di base sulle caratteristiche della funzione (elementare) y=sen$x$.

   Mi sembra particolarmente interessante ed impegnativa la richiesta di stabilire (quantitativamente) per quali valori del parametro k l'equazione h(x)=k presenta quattro soluzioni distinte. Come già precisato, il quesito si risolve mettendo in atto le competenze sulla gestione della monotonia delle funzioni composte.

   La richiesta se h(x) ammetta punti di (massimo o) minimo relativi o assoluti mira, secondo il mio parere, a capire se lo studente riesce a dedurre che la funzione ammette effettivamente un punto di minimo relativo che non è assoluto. Del resto, per quanto concerne i valori massimo e minimo assoluti, la loro esistenza è garantita dal teorema di Weierstrass, considerato che la funzione è continua perché composta da due funzioni continue ed è definita nell'intervallo chiuso [0;2].

   Ritengo che la risoluzione del quarto quesito assorba almeno per il 50% le competenze necessarie per la risoluzione dell'intero problema.