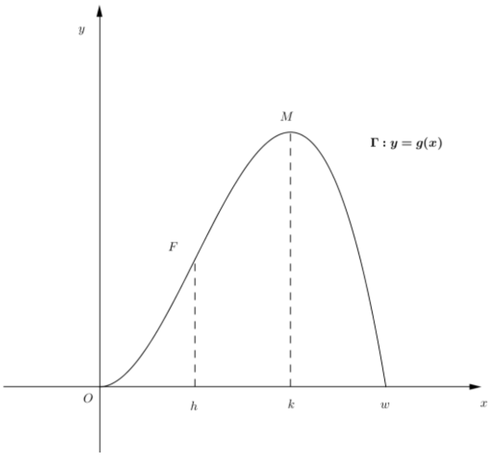
Soluzione problema 1

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

Poiché f è una funzione continua in $[0,\omega]$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $f(x)=g'(x)$. Dal grafico di $g(x)$ deduciamo un possibile andamento del grafico di $g'(x)$.



Punto 1

$f(0)=g'(0)=0$, poiché la curva è tangente nell'origine all'asse delle ascisse

$f(k)=g'(k)=0$, poiché la curva ha in k un massimo relativo interno al dominio

Per studiare i massimi e i minimi di f osserviamo che $y=g(x)$ ha concavità rivolta verso l'alto per $x\in(0,h)$,presenta un flesso in h e ha concavità verso il basso per $x\in(h,\omega)$. Quindi:

$g''(x)=f'(x)>0$ per $x\in(0,h)$; in tale intervallo $f(x)$ cresce

$g''(x)=f'(x)=0$ per $x=h$

$g''(x)=f'(x)<0$ per $x\in(h,\omega)$; in tale intervallo $f(x)$ decresce

$x=h$ è quindi un punto di massimo assoluto per $f(x)$

$x=0; x=\omega$ sono punti di minimo relativo.

Studiamo il segno di $f(x)$

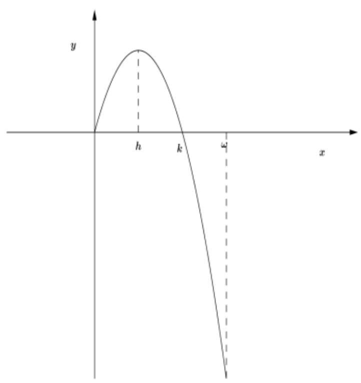
Osserviamo che $y=g(x)$ è crescente per $x\in(0,k)$, presenta un massimo in k e decresce per $x\in(k,\omega)$. Quindi:

$g'(x)=f(x)>0$ per $x\in(0,k)$

$g'(x)=f(x)=0$ per $x=k$, come già osservato

$g'(x)=f(x)<0$ per $x\in(k,\omega)$.

Un possibile andamento di $f(x)$ è quello riportato a lato.



Siamo ora in grado di stabilire che in $x=\omega$ la $f(x)$ ha un minimo assoluto.

Punto 2

L'equazione di una funzione polinomiale avente il grafico di figura è: $g(x) = ax^2(x-\omega)$ con $a \in R, a \neq 0$.

Proviamo che i numeri h, k dividono l'intervallo $[0, \omega]$ in tre parti uguali.

$$g'(x) = a(3x^2 - 2\omega x)$$

$g'(k) = 0; k > 0$ essendo k punto di massimo $\rightarrow k = \frac{2}{3}\omega$

$$g''(x) = a(6x - 2\omega)$$

$g''(h) = 0; h > 0$ essendo h punto di flesso $\rightarrow h = \frac{1}{3}\omega$

E' così dimostrato il punto 2.

Punto 3

Determiniamo l'equazione di $g(x)$ sapendo che $\omega = 3$ e che $g(1) = \frac{2}{3}$.

$$g(x) = ax^2(x-3)$$

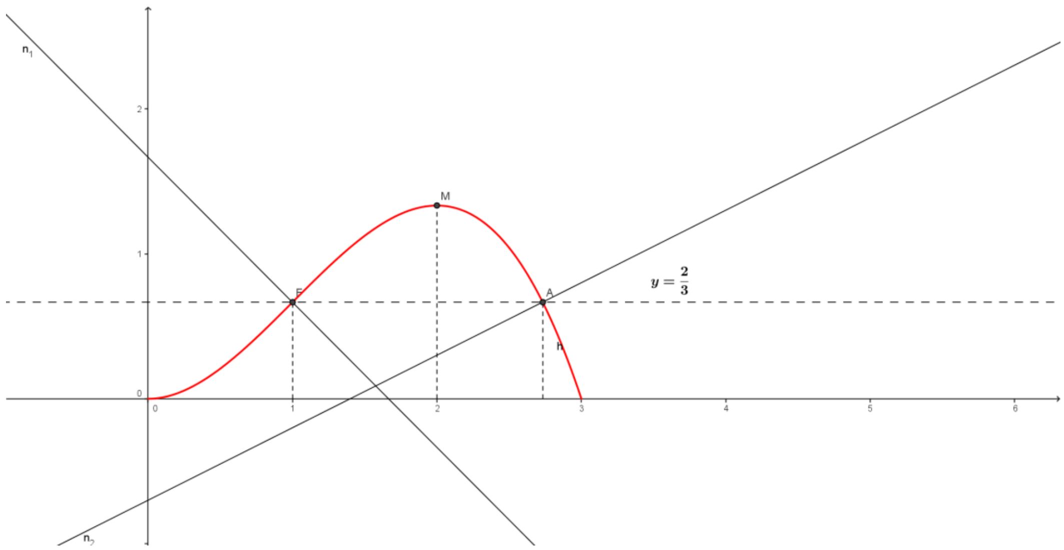
$$g(1) = \frac{2}{3} \rightarrow -2a = \frac{2}{3} \rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

L'equazione è:

$g(x) = -\frac{1}{3}x^2(x-3) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$ con $x \in [1,3]$

Per quanto visto nel punto 2 la curva ha un flesso in $x = 1 \rightarrow y = \frac{2}{3} \rightarrow F\left(1, \frac{2}{3}\right)$

e un punto di massimo in $x = 2 \rightarrow y = \frac{4}{3} \rightarrow M\left(2, \frac{4}{3}\right)$



Determiniamo le intersezioni di $y = g(x)$, $x \in [1,3]$, con la retta $y = \frac{2}{3}$.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \rightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

soluzioni accettabili:

$x = 1 \rightarrow F\left(1, \frac{2}{3}\right)$ e $x = 1 + \sqrt{3} \rightarrow A\left(1+\sqrt{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$g'(x) = -x^2 + 2x$$

Equazione della normale in F :

$$g'(1) = 1 \rightarrow y - \frac{2}{3} = -1(x-1)$$

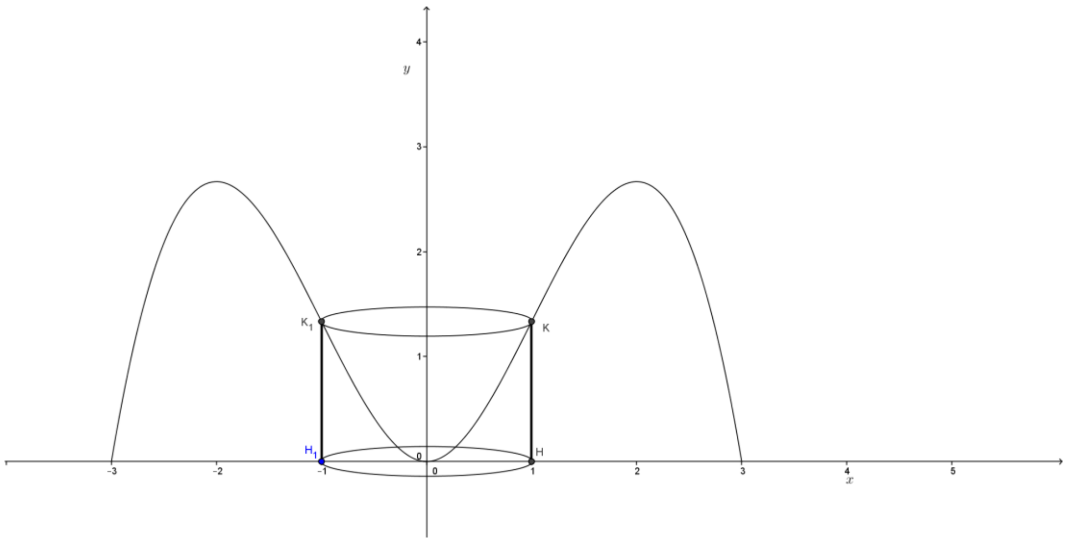
$$n_1 : y = -x + \frac{5}{3}$$

Equazione della normale in A :

$$g'(1+\sqrt{3}) = -2 \rightarrow y - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(x - 1 - \sqrt{3}\right)$$

$$n_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Punto 4



Sia $x \in [0,3]$; il segmento $HK = g(x)$ ruotando intorno all'asse delle ordinate genera la superficie laterale di un cilindro di raggio x e altezza $g(x) : S_l(x) = 2\pi x \cdot g(x)$.

Il volume del guscio cilindrico è:

$$dV(x) = 2\pi x \cdot g(x)\, dx$$

Il volume del solido è:

$$\int_0^3 (2\pi x) \cdot g(x) dx .$$

Calcoliamo l'integrale $\int_0^3 (2\pi x) \cdot \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) dx = 2\pi \int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x^4 + x^3\right) = 8{,}1\pi$

Se l'unità di misura è espresso in decimetri, il volume è $8{,}1\pi dm^3 = 8{,}1\pi litri$, che si può approssimare a $\approx 25 litri$