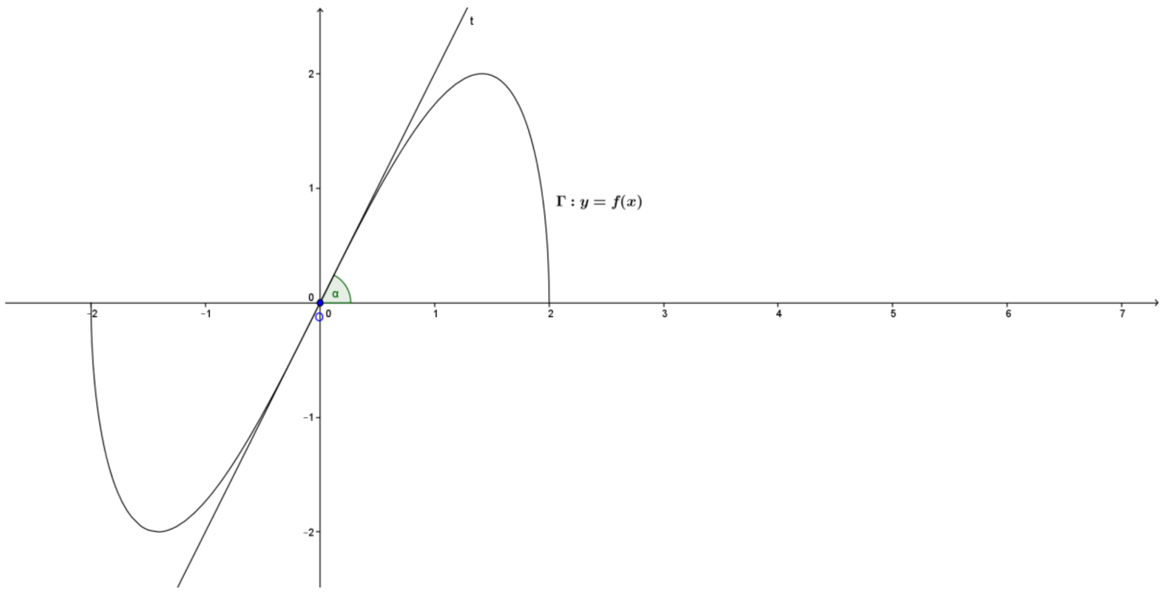
Soluzione problema 2

Punto 1



Calcoliamo il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$ funzione continua in $[-2,2]$, derivabile in $(-2,2)$.

$$f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)>0$ per $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$f'(x)=0$ per $x=-\sqrt{2}\vee x=\sqrt{2}$

$f'(x)<0$ per $x\in(-2,-\sqrt{2})\vee x\in(\sqrt{2},2)$

massimo assoluto in $M(\sqrt{2},2)$

minimo assoluto in $N(-\sqrt{2},-2)$

Punto 2

$$f(-x)=-x\cdot\sqrt{4-x^2}=-f(x)$$

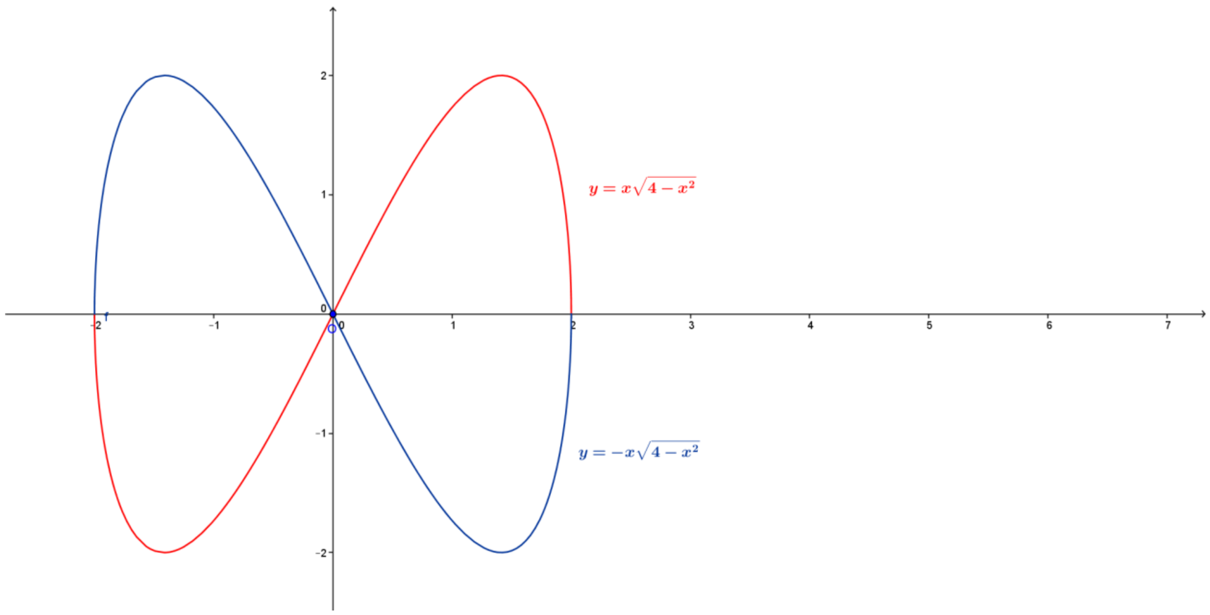
La funzione è dispari e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine O, che è quindi centro di simmetria per Γ.

Il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in O è $f'(0)=2$, quindi:

$$tg(\alpha)=2\rightarrow\alpha=arctg(2)\rightarrow\alpha°\simeq 63°26'.$$

Punto 3

La curva $y^2 = x^2\left(4-x^2\right)$ è composta dai due rami di curve di equazione $y = \pm x\cdot\sqrt{4-x^2}$; in particolare la curva $y=-x\cdot\sqrt{4-x^2}$ è la simmetrica della $y = x\cdot\sqrt{4-x^2}$ rispetto all'asse delle ascisse.
Il grafico è:



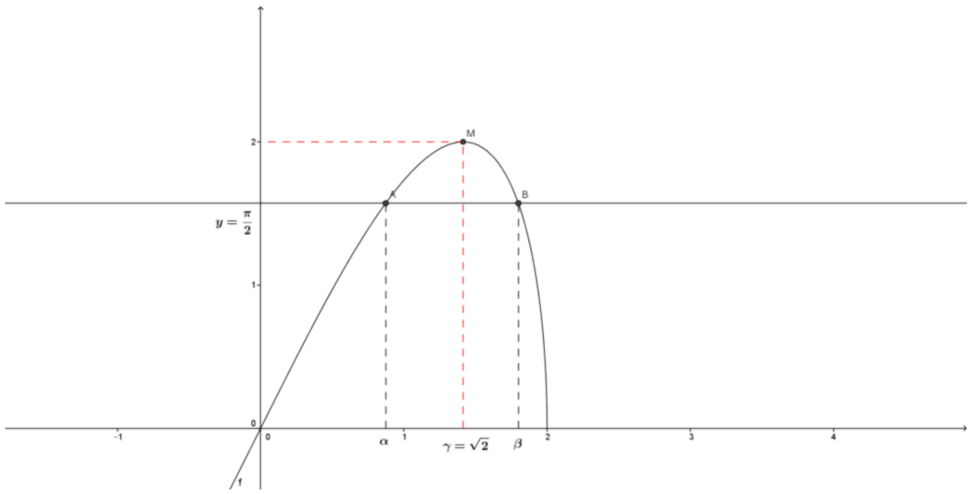
Calcoliamo l'area della regione di piano da essa racchiusa:

$$4\cdot\int_0^2\left(x\sqrt{4-x^2}\right)dx = -2\int_0^2\left(-2x\sqrt{4-x^2}\right)dx = \frac{32}{3}$$

Punto 4

Consideriamo la funzione composta $h(x)=\sin\left(f(x)\right); 0\le x\le 2$.

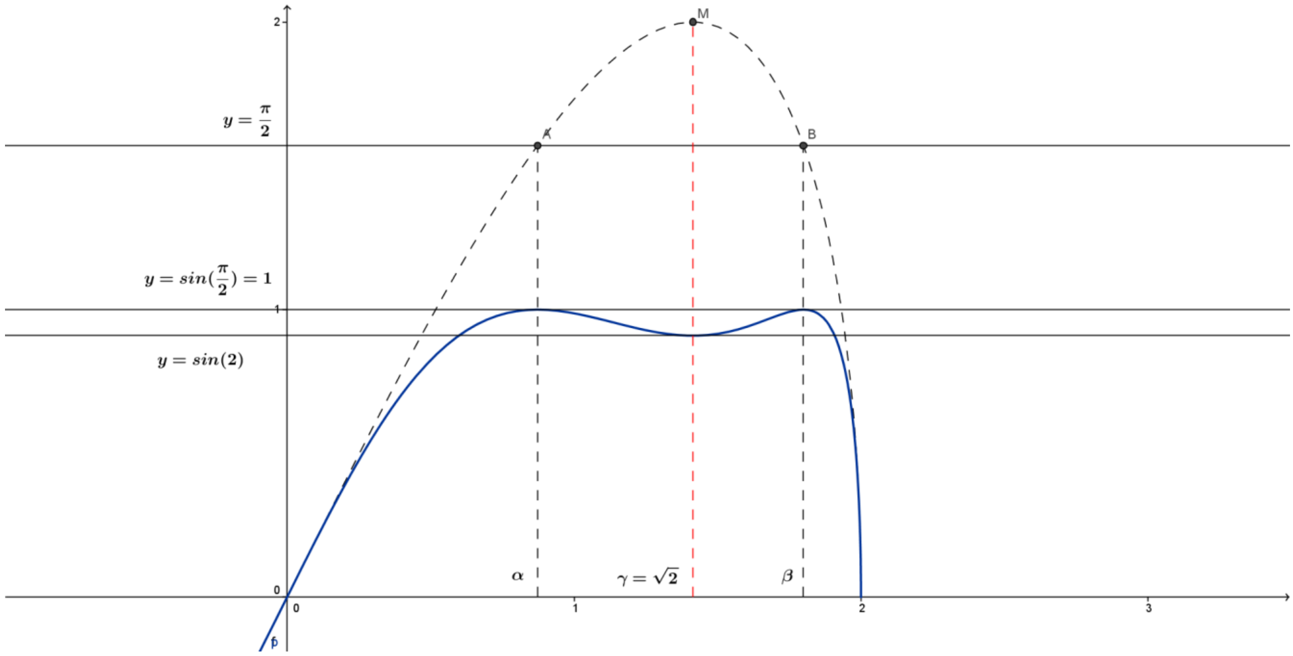
I punti di $h(x)$ che hanno ordinata 1 sono quelli per i quali $f(x)=\frac{\pi}{2}$. Per individuarli bisognerà intersecare il grafico di $f(x)$ nell'intervallo $[0,2]$ con la retta di equazione $y=\frac{\pi}{2}$. Le intersezioni sono due: α, β



Il grafico di $h(x)$ presenterà due massimi assoluti, in α, β per i quali si ha: $h(\alpha)=h(\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

due minimi assoluti per x=0 e x=2 per i quali si ha: $h(0)=h(2)=0$ e un minimo relativo in $\gamma=\sqrt{2}$ per il quale si ha: $h(\sqrt{2})=\sin(2) \approx 0.9$.

Il grafico probabile è:



L'equazione $h(x)=k$ ha 4 soluzioni distinte per $\sin(2)<k<1$.