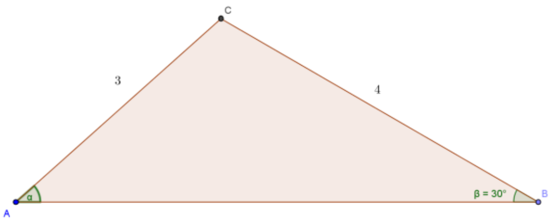
Soluzione dei quesiti

Quesito 1



Applichiamo il teorema dei seni al triangolo ABC:

$$\frac{\sin\alpha}{BC}=\frac{\sin\beta}{AC}\rightarrow\sin\alpha=\frac{BC}{AC}\sin\beta=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

$$\alpha=\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\rightarrow\alpha^\circ\approx 41°49'.$$

Quesito 2

In ogni vertice devono concorrere almeno 3 facce e la somma degli angoli deve essere minore di 360°. Gli esagoni regolare hanno gli angoli i 120°. Essendo $120°\times 3=360°$, non è possibile avere un poliedro regolare le cui facce sono esagoni.

Quesito 3

Ricordiamo lo sviluppo del binomio di Newton:

$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$; la somma degli esponenti deve essere uguale ad n

Consideriamo lo sviluppo di

$$\left(2a^2-3b^3\right)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(2a^2\right)^i\cdot\left(-3b^3\right)^{n-i}$$

$-1080a^4b^9=-1080\left(a^2\right)^2\cdot\left(b^3\right)^3$ quindi $n=2+3=5$.

Quesito 4

Osserviamo che la funzione $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ è continua e positiva per $x\in[-2,-1]$.

L'area di ciascuna sezione del solido è:

$$f(x)\cdot h(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}$$

Il volume è:

$$V=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}dx=\frac{\sqrt{e}-1}{e}$$

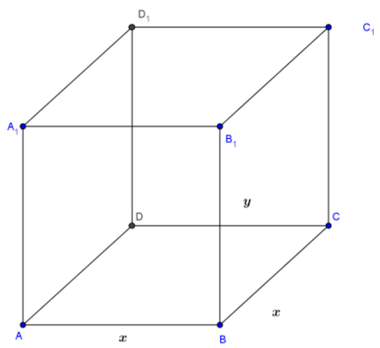
Quesito 5

Il minimo comune multiplo di 2-3-5 è 30

Tra i numeri 1,2,.....,30 vi sono 8 numeri non divisibili né per 2 né per 3 né per 5: 1-7-11-13-17-19-23-29.

Il numero dei numeri 1,2,3,......,6000 non divisibili né per 2 né per 3 né per 5 sono: $\frac{6000}{30}\cdot 8=1600$.

Quesito 6



Poniamo: $AB=BC=x>0$; $BB_1=y>0$

Il volume è $V=5l=5dm^3$.

$$V=x^2\cdot y=5\rightarrow y=\frac{5}{x^2}$$

La superficie è:

$$S(x)=2x^2+4x\cdot y=2x^2+4x\cdot\frac{5}{x^2}=2x^2+\frac{20}{x}$$

$$S'(x)=4x-\frac{20}{x^2}=\frac{4(x^3-5)}{x^2}>0$$

Risolvendo la disequazione si ha che:

$S'(x)<0$ per $x\in\left(0,\sqrt[3]{5}\right)$

$S'(x)=0$ per $x=\sqrt[3]{5}$

$S'(x)>0$ per $x>\sqrt[3]{5}$

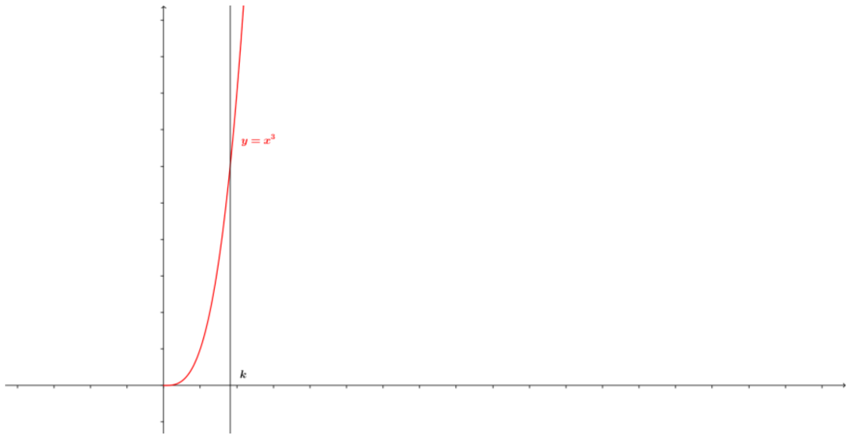
$x=\sqrt[3]{5}$ è minimo assoluto

$$y=\frac{5}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{5}$$

La lattina che utilizza la minima quantità di latta è quella cubica. Il lato del cubo è:

$l=\sqrt[3]{5}dm=\sqrt[3]{5}\cdot 100mm \approx 171mm$.

Quesito 7



La funzione è continua, quindi per il teorema della media esiste $z \in [0,k]$ tale che:

$$f(z) = \frac{\int_0^k x^3 dx}{k} \to 9 = \frac{\int_0^k x^3 dx}{k} \to \int_0^k x^3 dx = 9k$$

Risolvendo otteniamo:

$\frac{k^4}{4} = 9k \to k^3 = 36 \to k = \sqrt[3]{36}$, essendo $k > 0$ e quindi $k \neq 0$.

Quesito 8

Consideriamo il polinomio $Q(x) = P(x) - 3$ che risulta essere tangente all'asse delle ascisse in $x = 2$ e $x = 3$ e

$Q(1) = P(1) - 3 = -3$.

Essendo $Q(x)$ tangente all'asse delle ascisse la sua equazione sarà:

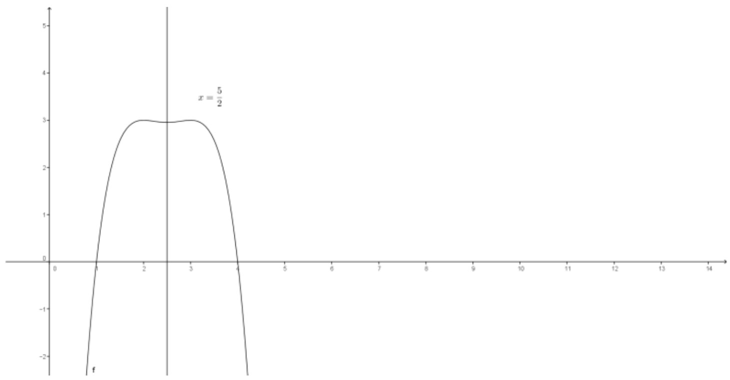
$$Q(x) = a(x-2)^2(x-3)^2$$

Dalla condizione $Q(1) = -3 \to 4a = -3 \to a = -\frac{3}{4}$

$Q(x) = -\frac{3}{4}(x-2)^2(x-3)^2 \to Q(4) = -3 \to P(4) = Q(4) + 3 = 0$ -

Il quesito poteva anche essere risolto nel modo seguente.

Un possibile andamento del polinomio $P(x)$ è il seguente.



Per la simmetria rispetto la retta $x = \frac{5}{2}$,

$P(4) = P(1) = 0$.

Quesito 9

Le condizioni sono:

$$\begin{cases} x+5>0 \rightarrow x>-5 \\ 3-\log_2(x+5)\geq 0 \rightarrow \log_2(x+5)\leq 3 \rightarrow x+5\leq 8 \rightarrow x\leq 3 \end{cases}$$

Il dominio della funzione è pertanto: $D=\{x\in R; -5<x\leq 3\}$.

Quesito 10

L'uguaglianza è vera per:

$$\begin{cases} x^2-6x+1=0 \\ x^2-10x+26>0 \end{cases}$$

La disequazione è sempre soddisfatta;

$x^2-6x+1=0$ per $x=3\pm 2\sqrt{2}$.

L'atra possibilità è che la base sia uguale a 1:

$$\frac{1}{5}\left(x^2-10x+26\right)=1$$

$$x^2-10x+26=5$$

$$x^2-10x+21=0$$

$$x=5\pm\sqrt{25-21}=5\pm 2$$

$$x=3; x=7$$