Soluzione Problema 1

1.

Ricordiamo che una funzione *h(x)* è derivabile in un punto *c* se esiste finita la sua derivata $h'(c)$ nel punto *c*.

Per il significato geometrico della derivata ciò significa che esiste ed è unica la retta tangente al grafico di *h(x*) nel punto *(c,h(c))* e che tale retta non è perpendicolare all'asse *x*.

Pertanto :

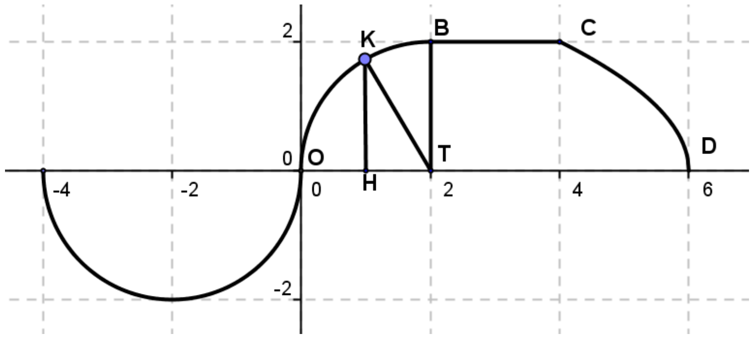
- nei punti A , O e D la retta tangente al grafico di *g(x*) è perpendicolare all'asse x e perciò in tali punti *g (x)* non è derivabile.
- nel punto C il grafico ammette due rette tangenti una destra e una sinistra e pertanto nemmeno in esso *g(x)* è derivabile.
- nel punto B la retta tangente è la retta BC che, essendo parallela all'asse x ha coefficiente angolare zero e quindi in esso la derivata di *g(x*) esiste e vale zero.

Si conclude che solo in B *g(x)* è derivabile.

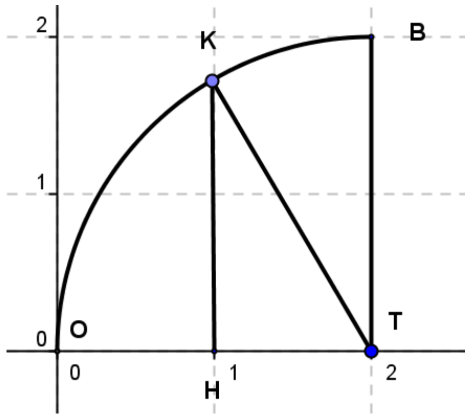
2. Per il significato e le proprietà dell'integrale definito si ha:
   - *f(-4) = 0*
   - *f(0*) è il valore dell'area, presa con segno negativo, del semicerchio delimitato dalle semicirconferenza di diametro AO , e quindi :

$$f(0) = -\frac{1}{2}\pi 2^2 = -2\pi$$

   - *f(1)* si ottiene sommando a f(0) il valore dell'area del triangolo mistilineo *HOK* disegnato nella figura seguente , dove K è un punto dell'arco OB di ascissa 1 e H è il punto di coordinate (1,0)



Di seguito il particolare della figura:



Calcoliamo l'area di tale triangolo :
TH = 1 mentre l'arco di circonferenza *OB* ha equazione
$y(x) = \sqrt{4x - x^2}$ da cui si ricava che l'ordinata di K è
y(1) $= \sqrt{3}$ e quindi $KH = \sqrt{3}$
Detto α l'angolo HTK si ha : $tg\alpha = \frac{KH}{TH} = \sqrt{3}$ e quindi α = 60° . Se ne deduce che il settore TOK è la sesta parte del cerchio di centro T e raggio 2 e quindi si ha:
Area (triangolo mistilineo HOK) = Area (settore TOK) - Area (triangolo THK) = $\frac{1}{6}\pi 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$
Pertanto:

$$f(1) = -2\pi + \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -5{,}05$$

- *f(2)* si ottiene aggiungendo a *f(0)* l'area del settore di centro *T* e arco *OB* che è un quarto di cerchio e quindi

  f(2) = f(0) + $\frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = -2\pi + \pi = -\pi$

- *f(4)* si ottiene aggiungendo a *f (2)* l'area del rettangolo di dimensioni *BC = 2* e *TB = 2*. Pertanto:

  f(4) = f(2) + 2·2 = - π + 4 ≈ 0,86

- *f(6)* si ottiene aggiungendo a *f(4)* l'area della regione delimitata dall'arco di parabola *CD*, dall' asse x e dalla retta *x = 4*

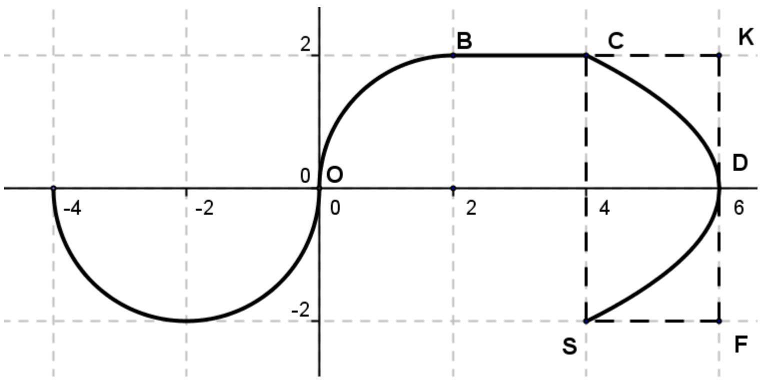
Tale area si può ottenere in due modi:

primo modo : utilizzando il calcolo integrale .

L'arco *CD* appartiene alla parabola di equazione $x = -\frac{1}{2}y^2 + 6 \ \rightarrow 2x = -y^2 + 12 \ \rightarrow \ y = \sqrt{12-2x}$ e pertanto l'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale : $\int_4^6 \sqrt{12-2x}dx =$

$-\frac{1}{2}\int_4^6 -2(12-2x)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[(12-2x)^{\frac{3}{2}}\right]_4^6 = -\frac{1}{3}\left(0-4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{8}{3}$

secondo modo: utilizzando un teorema di Archimede.
Non è necessario ricavare l'equazione dell'arco di parabola né è necessario il calcolo integrale ; basta osservare che l'area richiesta è l'area della metà del segmento parabolico delimitato dall'arco di parabola *CDS* e dal segmento *CS* (vedi figura seguente);



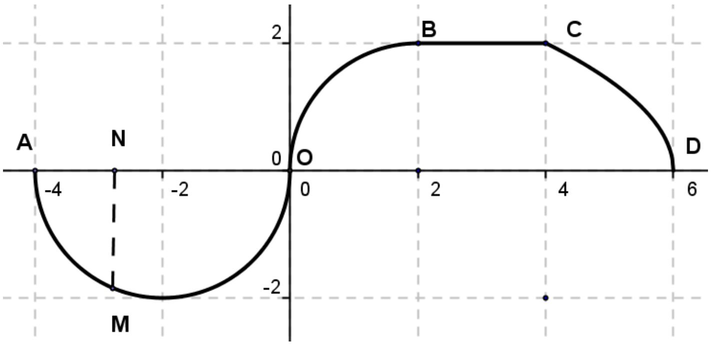
per il citato teorema di Archimede l'area dell'intero segmento parabolico è data da:

$$\frac{2}{3}CK \cdot KF = \frac{2}{3}2\cdot 4 = \frac{16}{3}$$

Perciò: area di metà segmento parabolico = $\frac{1}{2}\frac{16}{3} = \frac{8}{3}$

Si conclude che : *f(6) = f(4)* + $\frac{8}{3} = -\pi + 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} - \pi \cong 5{,}53$

3. Sia *N* un punto dell'asse *x* di ascissa *x* con *- 4 < x < 0* (vedi figura seguente)



Allora $f(x) = \int_{-4}^{x} g(t)dt$ rappresenta, in modulo l'area della regione delimitata dal grafico di *g(x)* e dall'asse *x* sull'intervallo *[-4,x]*
Però per *-4 <x<0* è *f(x) < 0*, perché la funzione integranda *g(x) <0* , e rappresenta , in modulo, l'area della regione delimitata dal grafico di *g(x)* e dall'asse *x* sull'intervallo *[-4,x]* . Man mano che *x* cresce, sempre però mantenendosi minore di zero, *f(x)* decresce perché si sommano ulteriori aree negative fino a che per *x = 0* si ha : $f(0) = \int_{-4}^{0} g(x)dx = -2\pi$ che rappresenta in modulo l'area del semicerchio delimitato dalla semicirconferenza di diametro *AO*.
Per *x > 0* , *f(x)* comincia a crescere perché all'area negativa del semicerchio si sommano aree positive; infatti : $f(x) = f(0) + \int_{0}^{x} g(t)dt$ e quest'ultimo integrale è maggiore di zero perché per *x>0* è *g(x) > 0.*
Man mano che *x* cresce si aggiungono contribuiti di aree sempre positive e quindi *f(x)* cresce : perciò per *x >0* *f(x)* è crescente.

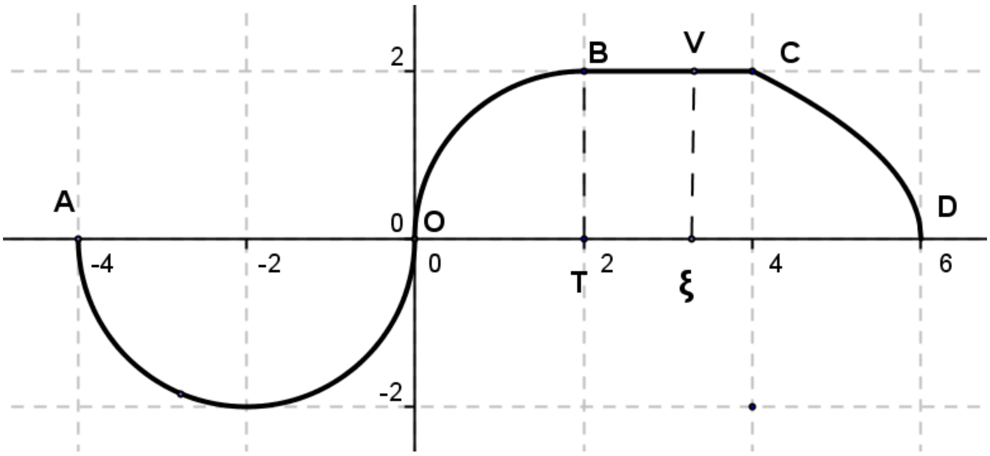
Detto in termini più formali:
$-4 < x < 0$: $f'(x) = g(x) < 0$ e quindi f(x) è decrescente perché la sua derivata è minore di zero;
$x > 0$: $f'(x) = g(x) > 0$ e quindi *f(x)* è crescente perché la sua derivata è maggiore di zero;

poiché, come abbiamo visto f(2) = $-\pi < 0$ e e f(4) = $4 - \pi > 0$, essendo f(x) continua, ne consegue, per il teorema di Bolzano, che per qualche

ξ: $2 < \xi < 4$ deve aversi $f(\xi) = 0$.

Se si osserva che

$f(\xi) = f(2) + \ area\ rettangolo\ di\ dimensioni\ 2\ e\ (\xi - 2)$ (vedi fig .)



si ricava che $f(\xi) = -\pi + 2(\xi - 2) = 2\xi - 4 - \pi = 0$ da cui

$$\xi = 2 + \frac{\pi}{2} \cong 3{,}57 \ ;$$

detto in termini più formali:

per 2 < x < 4 si ha *g(x) = 2* perciò

$f(\xi) = \ f(2) + \int_2^{\xi} 2\, dx = -\pi + 2(\ \xi - 2) = 2\xi - 4 - \pi$ e quindi

$f(\xi) = \ 0 \ \rightarrow \xi = 2 + \frac{\pi}{2}$.

In conclusione:

$$f(x) < \ 0 \qquad per - 4 < x < 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$f(-4) = f\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f(x) > 0 \qquad per\ 2 + \frac{\pi}{2} < x \leq 6$$

4. Teniamo presente che :

$$f'(x) = g(x) \ \ ; \ \ f''(x) = g'(x)$$

a) - 4 < x < - 2

$f'(x) = g(x) < 0$

$f''(x) = g'(x) < 0$ perché *g(x)* è decrescente

$f''(-2) = g'(-2) = 0$ perché in *x = - 2* *g(x)* ha un minimo

Quindi f(x) è decrescente e volge la concavità verso il basso e inoltre

f(-2) = - π.

b) - 2 < x < 0

$f'(x) = g(x) < 0$

$f''(x) = g'(x) > 0$ perché *g(x)* è crescente

Quindi *f (x)* è decrescente e volge la concavità verso l'alto

e inoltre *f(0) = - 2π*

c) 0 < x < 2

$f'(x) = g(x) > 0$

$f''(x) = g'(x) > 0$ perché *g(x)* è crescente

Quindi f(x) è crescente e il suo diagramma volge la concavità verso l'alto.

d) 2 < x < 4

$f'(x) = g(x) = 2 > 0$ (cioè *f '(x)* è costante)

$f''(x) = g'(x) = 0$

Quindi *f(x)* è crescente e il suo diagramma è un segmento.

e) 4 < x < 6

$f'(x) = g(x) > 0$

$f''(x) = g'(x) < 0$ (perché *g(x)* è decrescente)

Quindi $f(x)$ è crescente e il suo diagramma volge la concavità verso il basso.

Massimo di $f(x) = f(6)$
Minimo di $f(x) = f(0) = -2\pi$.

Sintetizzando:

$$f''(x) < 0 \quad per \quad -4 < x < -2 \quad e \quad 4 < x < 6$$

$$f''(x) = 0 \quad per \quad 2 < x < 4$$

$$f''(x) > 0 \quad per \quad -2 < x < 0 \quad e \quad 0 < x < 2$$

La funzione $f(x)$ presenta un minimo assoluto nel punto $x = 0$ e un massimo assoluto nel punto $x = 6$.

L'andamento del grafico di $f(x)$ è il seguente:

Andamento di $f(x)$