Soluzione Problema 2

1.

Se t è un numero tale che: $0 < t < 2$ si ha

$$f(2-t) = (2-2+t)\sqrt{4(2-t9-(2-t)^2} = t\sqrt{8-4t-4-t^2+4t}$$
$$= t\sqrt{8+4t-(t^2+4+4)} = t\sqrt{4(2+t)-(2+t)^2}$$

Si ha anche

$$f(2+t) = (2-2-t)\sqrt{4(2+t)-(2+t)^2} = -t\sqrt{4(2+t)-(2+t)^2} =$$

$$= -f(2-t) \quad .$$

Tanto dimostra che (2,0) è centro di simmetria di Γ.

Si ha poi :

$$f'(x) = -\sqrt{4x-x^2} + (2-x)\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = \frac{-4x+x^2+x^2+4-4x}{\sqrt{4x-x^2}}$$

$$= \frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}};$$

Perciò $f'(2) = -2$ è il coefficiente angolare della tangente a Γ in (2,0) ; detto α l'angolo che detta tangente forma con la direzione positiva dell'asse x si ottiene

α = arctg (-2) → α ≅ $(116{,}57)^\circ$ = 116° e 34'.

2.

$$f'(2-t) = \frac{2(2-t)^2-8(2-t)+4}{\sqrt{4(2-t)-(2-t)^2}} = \frac{8+2t^2-8t-16+8t+4}{\sqrt{8-4t-4-t^2+4t}} =$$

$$= \frac{2t^2 + 8t + 8 - 8t - 16 + 4}{\sqrt{4t + 8 - t^2 - 4t - 4}} = \frac{2(t^2 + 4t + 4) - 8(t + 2) + 4}{\sqrt{4(t + 2) - (t + 2)^2}} =$$

$$= \frac{2(t + 2)^2 - 8(t + 2) + 4}{\sqrt{4(t + 2) - (t + 2)^2}} = f'(2 + t)$$

Tanto prova che i coefficienti angolari delle rette tangenti a Γ nei punti di ascissa 2 + t e 2 – t sono uguali e pertanto dette tangenti sono parallele.

La retta *r* di equazione 21x + 10y + 31 = 0 ha coefficiente angolare m = - 2,1 ; quindi per verificare se esistono rette tangenti a Γ parallele a tale retta dovremmo risolvere l'equazione $\frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}} = -2{,}1$ di difficile o impossibile risoluzione con i metodi noti.
Per rispondere alla domanda conviene allora seguire un'altra strada che ci consentirà di rispondere anche alla seconda domanda.
L'esame del grafico Γ e l'espressione di $f'(x)$ portano ad osservare che: $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$ (con linguaggio non corretto ma espressivo potremmo dire che la tangente in O ha coefficiente angolare $+\infty$).
Supponiamo ora che un punto P partendo da O percorra l'arco di Γ del primo quadrante; naturalmente quando P si muove su Γ variano le direzioni delle tangenti in esso a Γ. Dalla variazione delle direzioni delle tangenti è possibile dedurre la variazione dei relativi coefficienti angolari. Quando P coincide con O la tangente in P a Γ ha coefficiente angolare $+\infty$ poi man mano che P si muove su Γ i coefficienti angolari delle tangenti iniziano a diminuire fino ad arrivare a zero quando P coinciderà col massimo di Γ e da li in poi i coefficienti assumeranno valori negativi fino a raggiungere il valore – 2 quando P sarà arrivato nel punto di intersezione di Γ con l'asse x, cioè quando P avrà coordinate $(2,0)$. Possiamo cioè concludere che i coefficienti angolari m_t delle tangenti a Γ nei punti del primo quadrante variano da $+\infty$ a -2 : cioè $-2 < m_t < +\infty$.
Nessuna tangente allora può avere un coefficiente angolare uguale a – 2,1 che è minore di - 2 e quindi possiamo affermare che non esistono nel primo quadrante tangenti a Γ parallele alla retta *r*.
Se P continua a muoversi su Γ, percorrendone l'arco del quarto quadrante, avrà ascissa del tipo *2+t* e, per quanto visto le tangenti a Γ nei punti con tali ascisse sono parallele a quelle dei punti del primo quadrante di ascissa *2-t*.
Pertanto non esistono tangenti a Γ parallele ad *r* .
Il ragionamento fatto ci consente di rispondere anche alla seconda domanda.

La retta s di equazione $23x + 12y + 35 = 0$ ha coefficiente angolare $-\frac{23}{12}$ che è maggiore di – 2 e pertanto esistono due tangenti a Γ parallele ad s, una nel primo quadrante e un'altra nel quarto.

3. Sia A l'area della regione di piano delimitata da Γ e dall'asse x. Stante la simmetria di Γ rispetto a *(2,0)* si ha:

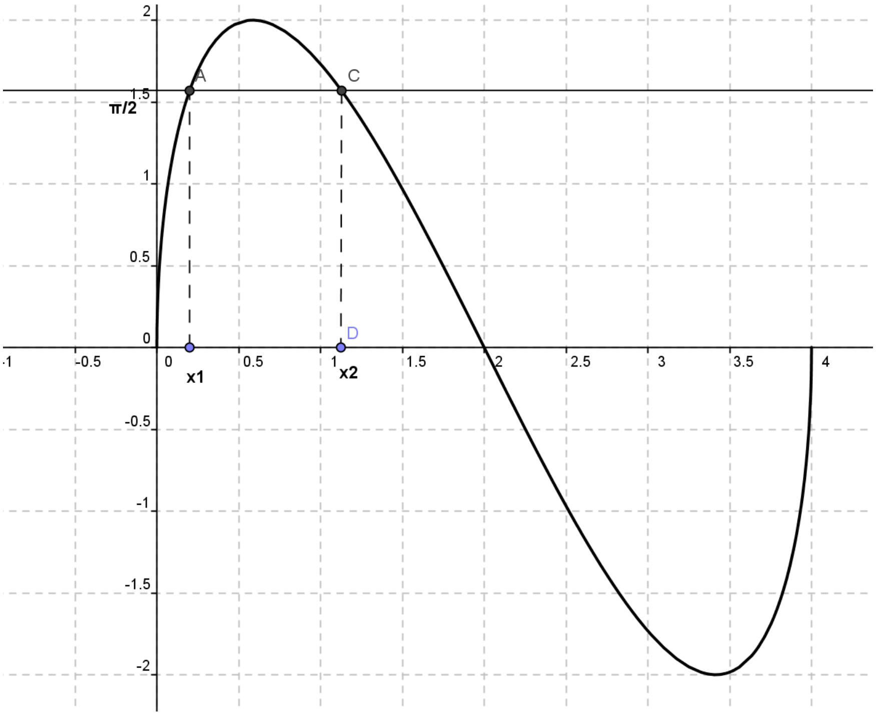
$$A = 2\int_0^2 (2-x)\sqrt{4x-x^2}\,dx = \int_0^2 (4-2x)(4x-x^2)^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}$$

4. Nell'intervallo [0,2], i valori di $f(x)$ variano da 0 a 2. Per la precisione $f(x)$ assume il valore zero per $x = 0$ poi, all'aumentare di x, cresce fino a raggiungere il massimo valore che è 2, assunto da $f(x)$ quando $x = 2-\sqrt{2}$ e quindi $f(x)$, essendo una funzione continua, per il teorema dei valori intermedi, dovrà assumere tutti i valori compresi tra il minimo che è zero e il massimo che è 2. Pertanto nell'intervallo $\left[0,\ 2-\sqrt{2}\right]$ esiste necessariamente un punto x_1 tale che $f(x_1) = \frac{\pi}{2}$; poi al crescere di x nell'intervallo $[\,2-\sqrt{2}\,, 2]$ $f(x)$ riassume, decrescendo con continuità , i valori da 2 a 0. Quindi,per il teorema citato, dovrà esistere nell'intervallo $\left[2-\sqrt{2},\ 2\right]$ un valore x_2 tale che $f(x_2) = \frac{\pi}{2}$.

   Quindi si avrà: $h(x_1) = h(x_2) = sen\big(f(x_1)\big) = sen\big(f(x_2)\big) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
   Perciò i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1 sono due, e rappresentano altrettanti punti di massimo relativo per $h(x)$.

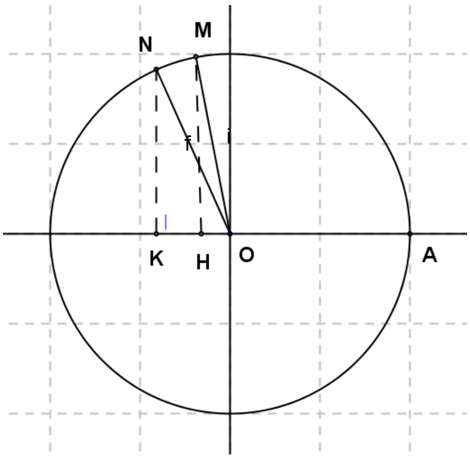
   E' opportuno osservare che $h(x) = senf(x)$ e quindi $f(x)$, essendo argomento della funzione seno, rappresenta la misura in radianti di un angolo.
   Osserviamo anche che:
   per $x \in [\,x_1, x_2]$ si ha $\pi/2 \leq f(x) \leq 2$;
   ciò è graficamente evidente nella seguente figura dove si nota che la retta $y = \frac{\pi}{2}$ incontra Γ in due punti di ascisse rispettive x_1 e x_2 :



e quindi per $x \in [\, x_1, x_2]$ si ha : $h(x) = sen(f(x)) \geq sen2$.

E’ facile rendersi conto della precedente disuguaglianza se ci riferiamo alla seguente figura dove sulla circonferenza goniometrica sono riportati l’angolo AON = 2*rad* e un angolo AOM = α con

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < 2rad$$



Come si vede: *senα = MH > NK = sen 2*

Pertanto per tutti i punti dell’intervallo $[\, x_1, x_2]$ si ha:

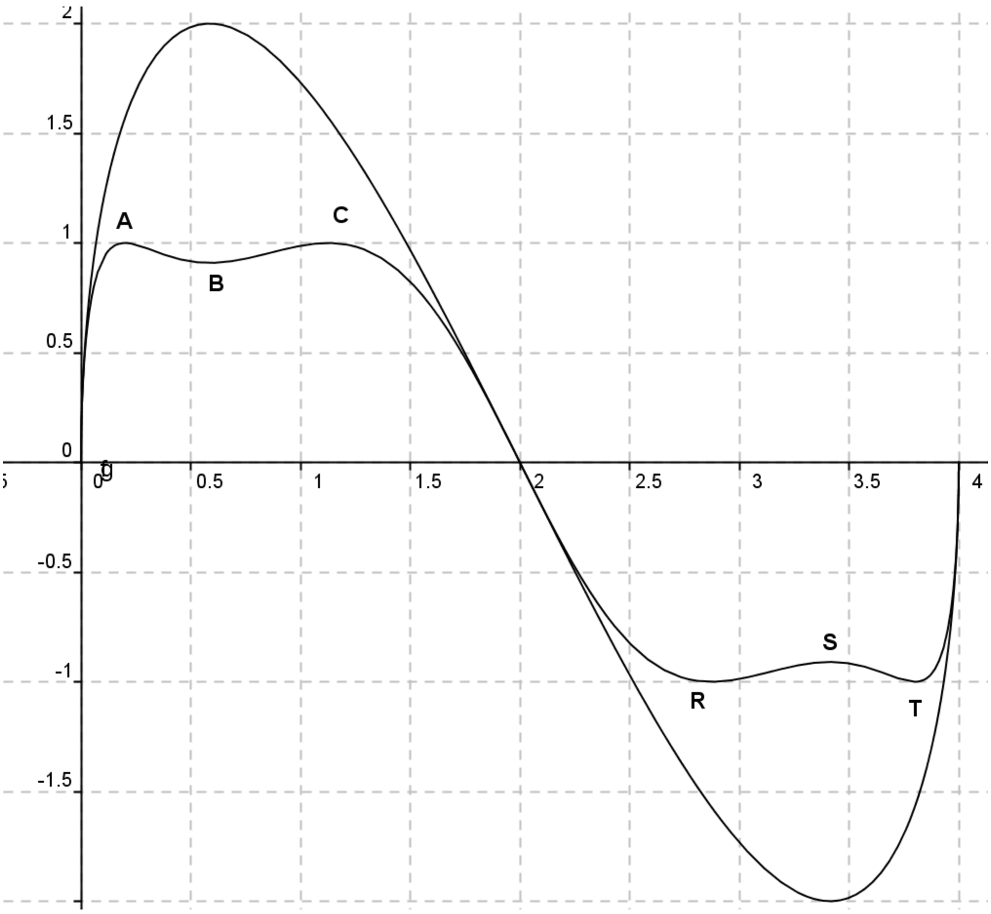
$$h(x) = sen\big(f(x)\big) \geq sen2 = sen(f\big(2-\sqrt{2}\big)) = h(2-\sqrt{2})$$

Poiché l'intervallo *[x_1,x_2]* è un intorno completo di $2-\sqrt{2}$, tanto basta per poter affermare che la funzione *h(x)* ha un minimo relativo nel punto $2-\sqrt{2}$.
Inoltre la funzione seno è una funzione dispari e quindi la simmetria di f(x) rispetto al punto *(2, 0)* si traduce nella simmetria di *h(x)* rispetto allo stesso punto.
Pertanto i punti x_1 e x_2 sono di massimo relativo per *h(x)* mentre i loro simmetrici rispetto al punto *(2 ,0)* sono di minimo relativo; il punto $2-\sqrt{2}$ è di minimo relativo mentre il i suo simmetrico rispetto a *(2, 0)* è di massimo relativo.

I punti di massimo e minimo relativo del grafico di *h(x)* sono chiaramente evidenziati nella figura seguente dove è disegnato Γ e, in modo qualitativo, il grafico di h(x) con i punti

$A\big(x_{1,}1\big)$, $B\big(2-\sqrt{2}, sen2\big)$, $C(x_2, 1)$

e i rispettivi simmetrici rispetto al punto (2,0) *R* , *S*, *T*.



Da tutto quanto precede si deduce che:
l'equazione h(x) = k ha 4 soluzioni distinte per

$$sen2 < k < 1 \quad \text{e} \quad -1 < k < -sen2$$

Infine essendo il grafico di *h(x)* simmetrico rispetto al punto (2 ,0) si ha :

$$\int_0^4 h(x)\,dx = \int_0^2 h(x)dx + \int_2^4 h(x)dx = \int_0^2 h(x)dx - \int_0^2 h(x)dx = 0$$