Risoluzione questionario PNI

1. Per il teorema dei seni si ha: $\frac{3}{sen30^\circ} = \frac{4}{sen\alpha}$ da cui $sen\alpha = \frac{4}{3}sen30^\circ = \frac{4}{3}\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ e perciò $\alpha$ = arcsen $\frac{2}{3}$ = $(41{,}81)^\circ = 41^\circ + \frac{81}{100}60' = 41°\ \ 48{,}6'$
2. Ciascun angolo di un esagono regolare misura 120°. Quindi un poliedro regolare a facce esagonali non può esistere perché, dovendo ogni suo angoloide avere almeno tre facce, la somma delle facce concorrenti in un vertice sarebbe uguale a 360° il che, per un noto teorema di geometria euclidea, è impossibile. In effetti se in un vertice del poliedro concorressero tre facce esagonali l'angoloide, misurando 360°, si appiattirebbe in un piano e non potrebbe essere parte di un poliedro. E' qui che si trova la risposta alla domanda che si pone spesso il protagonista del racconto "*Il ragazzo"* di *Dario Voltolini : " …come mai un pavimento può essere composto di figure tutte esagonali , mentre invece un pallone di cuoio deve avere anche alcuni pentagoni."* Perché un pallone con facce tutte esagonali non potrebbe esistere come figura spaziale.

3.
   a. Si considerino i seguenti eventi:

$$E_1 \begin{cases} 1°\ estrazione : \ pallina\ rossa \\ 2°\ estrazione : \ pallina\ non\ rossa \\ 3°\ estrazione : pallina\ non\ rossa \end{cases}$$

$$E_2 \begin{cases} 1° estrazione : pallina\ non\ rossa \\ 2°\ estrazione : pallina\ \ rossa \\ 3°\ estrazione : pallina\ non\ rossa \end{cases}$$

$$E_3 \begin{cases} 1°\ estrazione : \ pallina\ non\ rossa \\ 2°\ estrazione : \ pallina\ non\ rossa \\ 3°\ estrazione : \ pallina\ \ rossa \end{cases}$$

L'evento E, estrazione di una sola pallina rossa, è l'unione di $E_1$, $E_2$ ed $E_3$ e quindi essendo:

$$P(E_1) = \frac{5}{20}\frac{15}{19}\frac{14}{18} = \frac{35}{228}$$

$$P(E_2) = \frac{15}{20}\frac{5}{19}\frac{14}{18} = \frac{35}{228}$$

$$P(E_3) = \frac{15}{20}\frac{14}{19}\frac{5}{18} = \frac{35}{228}$$

si ottiene: $P(E) = 3\,\frac{35}{228} = \frac{35}{76} \cong 0{,}46$

b. I colori sono 4 : Rosso (R), Verde (V), Giallo (G), Bianco (B)
Le possibili terne di colori differenti sono $4 = \binom{4}{3}$ e cioè:

RVG, RVB, RGB, VGB

Le possibili terne RVG, in questo ordine, sono in numero di : $5·5·5 = 5^3$
Ma la stessa terna di colori può presentarsi con una sequenza diversa ( per es. GRV) e il numero di tali sequenze sono 3! (Quante le permutazioni di 3 elementi distinti) Dunque le possibili uscite di tali colori in ordine qualsiasi, sono in numero di: $3!·5^3$. Ripetendo il ragionamento con le altre 3 terne di colori diversi si conclude che le possibili uscite di 3 colori diversi ( casi favorevoli) sono in numero di : $4·3!·5^3$ . Ora il numero delle terne possibili è: 20·19·18. E pertanto la probabilità che le 3 palline siano di colori diversi è:

$P = \frac{4·3!·5^3}{20·19·18} = \frac{25}{57} \cong 0{,}44$

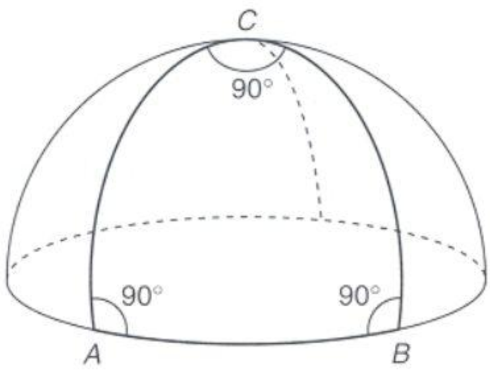
4.

Le sezioni che si ottengono tagliando il solido con piani perpendicolari all'asse x in un punto di ascissa x sono rettangoli di base $e^{\frac{1}{x}}$ e altezza $\frac{1}{x^2}$ e quindi la loro area è : $\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$ . Pertanto, detto V il volume di $\Omega$, utilizzando il cosiddetto metodo a fette si ottiene:

$$V = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx = -\int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} dx = -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_{-2}^{-1} = -\left(e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

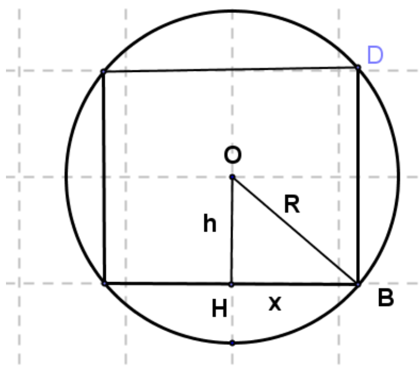
$$= \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e} = \frac{\sqrt{e} - 1}{e} \cong 0{,}239$$

5. La geometria sferica è un contesto di geometria non euclidea. In tale contesto consideriamo il triangolo (sferico) ABC in figura




AC e BC sono due archi di meridiano e AB è un arco di equatore; gli angoli ABC , BAC e ACB sono retti e quindi la somma degli angoli del triangolo è maggiore di 180°.

6. Consideriamo il solido formato da un cilindro inscritto in una sfera. La sezione di tale solido con un piano che contiene l'asse del cilindro, è un cerchio in cui é inscritto un rettangolo ( fig. seguente):




Posto $BH = x$ = raggio del cilindro ; $OH = h$ = metà altezza del cilindro si ha : $x^2 = R^2 - h^2$ e quindi, detto $V$ il volume del cilindro, si ottiene:

$V = \pi x^2(2h) = 2\pi h(R^2 - h^2)$ e perciò, essendo $2\pi$ una costante positiva, il massimo di $V$ si ottiene per quel valore di $h$ che fa assumere il valore massimo alla funzione $f(h) = R^2h - h^3$ . Ora

$$f'(h) = R^2 - 3h^2$$

$$f''(h) = -6h$$

Da qui si ricava : $f'\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = 0$ *e* $f''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) < 0$ perciò il massimo si ottiene per

$h = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$ ; in tal caso $x$ = raggio del cilindro $= \sqrt{2}$

7.

Preliminarmente Osserviamo che $x$ è argomento del logaritmo e quindi deve essere $x > 0$. Inoltre $f''(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ , perciò

$f''(x) > 0$ *per* $0 < x < 1$ *mentre* $f''(x) < 0$ *per* $x > 1$ ; ciò comporta che $f'(x)$ *cresce per* $0 < x < 1$ *e decresce per* $x > 1$. Si ha anche $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$ e $f'(1) = 1 > 0$; se ne deduce, per il teorema di Bolzano, che $f'(x)$, essendo continua, si annulla in un punto dell'intervallo $]0,1]$ . D'altra parte è anche $f'(3) = ln3 - 1 > 0$ e $f'(4) = ln4 - 2 = 2(ln2 - 1) < 0$ e quindi $f'(x)$ si annulla anche in un punto dell'intervallo $[3,4]$. Poiché in un punto di minimo di $f(x)$ la sua derivata $f'(x)$ si deve necessariamente annullare allora tra i valori proposti, o il punto 0,159 o il punto 3,146 deve essere quello in cui $f(x)$ assume il valore minimo. Poiché $f''(0{,}159) > 0$ e $f''(3{,}146) < 0$ si conclude che $f(x)$ assume il valore minimo in $x$ = 0,159 e, quindi, la risposta corretta è la D.

8. I versi di Dante cui il quesito fa riferimento:

*Quando si parte il gioco de la zara,*

*colui che perde si riman dolente,*

*repetendo le volte, e tristo impara;*

*con l'altro se ne va tutta la gente.* (Purgatorio Canto VI )

Zara deriverebbe dall'arabo *Zhar ( dado )* da cui la parola *azzardo.* In un certo senso il quesito è la rivisitazione di una questione che il granduca di Toscana pose a G. Galilei di cui quest'anno ricorre il 450- esimo anniversario della nascita.

Rispondiamo alla domanda seguendo Galilei:

le triplette di numeri ( il primo numero sul primo dado , il secondo sul secondo, il terzo sul terzo) che hanno per somma 10 oppure 9 sono riportate nella seguente tabella:

| Triplette a somma 9 | Triplette a somma10 |
|---|---|
| 6 2 1 | 6 3 1 |
| 5 3 1 | 6 2 2 |
| 5 2 2 | 5 3 2 |
| 4 4 1 | 5 4 1 |
| 4 3 2 | 4 4 2 |
| 3 3 3 | 4 3 3 |

.

Ma ciascun numero di ciascuna tripletta ha tre modalità di uscita: può uscire sul primo , sul secondo o sul terzo dado. Ed allora una tripletta formata da tre numeri diversi può uscire in 6 modi diversi ( tante quante sono le permutazioni di tre oggetti distinti); ad es. : 6 2 1 - 6 1 2 - 1 2 6 - 1 6 2 - 2 6 1 - 2 1 6

una tripletta formata da tre numeri di cui due uguali può uscire in tre modi diversi ( tante quante sono le permutazioni di tre oggetti di cui due uguali):
ad es. 4 4 1 - 4 1 4 - 1 4 4

una tripletta formata da tre numeri uguali può uscire in un sol modo ( tante quante sono le permutazioni di tre oggetti tutti e tre uguali); ad es: 3 3 3

La seguente tabella riporta le modalità di uscita di ogni tripletta:

| Triplette a somma 9 | Modalità di uscita | Triplette a somma 10 | Modalità di uscita |
|---|---|---|---|
| 6 2 1 | 6 | 6 3 1 | 6 |
| 5 3 1 | 6 | 6 2 2 | 3 |
| 5 2 2 | 3 | 5 4 1 | 6 |
| 5 4 1 | 3 | 5 3 2 | 6 |
| 4 3 2 | 6 | 4 4 2 | 3 |
| 3 3 3 | 1 | 4 3 3 | 3 |
| | Totale: 25 | | Totale: 27 |

D’altra parte, poiché i risultati possibili nel lancio di un dado sono 6, nel lancio di tre dadi, i risultati possibili sono $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ e quindi

P ( di ottenere 9) = $P_9 = \frac{25}{216}$ P ( di ottenere 10)= $P_{10} = \frac{27}{216}$

Si conclude che la probabilità di ottenere 9 è minore di quella di ottenere 10.

Poiché $\frac{P_9}{P_{10}} \cong 0{,}926$ si può dire che, mediamente, ogni 926 uscite del punteggio 9 se ne hanno circa 1000 del punteggio 10.

9. Gli elementi dei numeri naturali possono essere disposti in una successione:

1,2,3,4,…

Un insieme *I* ha la stessa cardinalità di N se i suoi elementi possono essere ordinati in una successione come quelli di N . In tal caso *I* si dice numerabile.

Allora Z ha la cardinalità di N perché i suoi elementi possono essere disposti in una successione : per es : 0, 1, - 1, 2, - 2 , 3, - 3 ….

Proviamo che Q ha la stessa cardinalità di N

Un qualsiasi numero razionale è radice di una equazione di primo grado $ax + b = 0$ dove, senza ledere la generalità, possiamo supporre $a > 0$ e $a$ e $b$ privi di fattori comuni.

Il numero $a + |b| + 1$ si dice altezza dell’equazione.

Nella tabella seguente sono elencate alcune equazioni con le soluzioni e le relative altezze

| Altezza | Equazioni | Soluzioni |
|---|---|---|
| 2 | x=0; | 0 |
| 3 | 2x=0; x+1=0 ; x-1=0, | -1 ; 1 |
| 4 | 3x=0; 2x+1=0; 2x-1=0; x+2=0; x-2=0; | -2 , - 1/2, 1/2 ; 2 |
| 5 | 4x=0; 3x+1=0; 3x-1=0; 2x+2=0;2x-2=0;x+3=0, x-3=0 | -3 ; - 1/3 ; 1/3 ; 3 |

Facendo crescere l’altezza si introducono un numero finito di numeri razionali ( che sono le soluzioni delle equazioni )

Se disponiamo i razionali elencando prima le soluzioni delle equazioni di altezza 2 poi le soluzioni di tutte le equazioni di altezza 3 e cosi di seguito , veniamo a costruire una successione :

$$0\,,-1,1\,,-2\,,-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,2\,....$$

che contiene tutti i numeri razionali.

Quindi Q ha la cardinalità di N potendosi i suoi elementi ordinare in una successione.

Anche R ha la cardinalità di N ? Per verificarlo premettiamo che:

*Se un insieme ha la cardinalità di N, ogni suo sottoinsieme infinito ha la cardinalità di N .*

Sia $A = \{a_1, a_2, a_{3,} \ldots\ldots\}$ un insieme numerabile e *B* un suo insieme infinito; allora sia $b_1$ il primo elemento di *A* appartenente a *B*, $b_2$ il secondo e così di seguito.

Allora $B = \{b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots\}$ è chiaramente numerabile.

Ciò premesso sia I l'insieme dei numeri reali x : $0 < x \leq 1$ ;

Supponiamo che I, che è un sottoinsieme di R, sia numerabile; allora esso è rappresentabile con la successione :

$$r_1\,,\ r_2\,,\ r_{3,}\ \ldots.$$

Se scriviamo tali numeri in forma decimale otteniamo

$r_1 = 0, a_1a_2a_3\ldots\ldots$

$r_2 = 0, b_1b_2b_3\ldots..$

$r_3 = 0,c_1c_2c_3\ldots.$

Consideriamo adesso il numero $\alpha = 0,\alpha_1\alpha_2\,\alpha_3\ldots.$con la condizione che :

$\alpha_1 \neq a_1$ ; $\alpha_2 \neq b_{2\,,;}$ $\alpha_3 \neq c_3$ ecc.

in tal modo:

α è diverso da $\mathbf{r}_1$ perché α e $\mathbf{r}_1$ differiscono almeno per la prima cifra decimale

α è diverso da $r_2$ perché α e $\mathbf{r}_2$ differiscono almeno per la seconda cifra decimale α è diverso da $r_3$ perché α e $\mathbf{r}_3$ differiscono almeno per la terza cifra decimale

Perciò $\alpha \neq r_k$ per ogni k ( k = 1 , 2, 3 ,….) pur essendo esso un numero reale appartenente ad I. Quindi I non può essere numerabile e per la premessa fatta non lo è nemmeno R.

10.

Il limite dell'espressione al numeratore non può essere né infinito né un numero finito diverso da zero altrimenti il limite proposto sarebbe uguale ad infinito e non ad 1, come si richiede. Allora deve essere

$\lim_{x\to 0} \sqrt{a+bx} - 2 = 0 \;\; da\ cui \;\; \sqrt{a} - 2 = 0 \; e\ quindi\ a = 4$

pertanto il limite diventa :

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+bx}-2}{x} = 1$ e applicando il teorema dell'Hospital si ottiene:
$\lim_{x\to 0} \frac{b}{2\sqrt{4+bx}} = 1 \rightarrow \frac{b}{2\sqrt{4}} = 1 \; e\ cio$è $\; b = 4$

Se non si volesse applicare il teorema dell'Hospital si potrebbe procedere così:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+bx}-2}{x} = \lim_{x\to 0} x \frac{\left(\sqrt{4+bx}-2\right)\left(\sqrt{4+bx}+2\right)}{x\left(\sqrt{4+bx}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{bx}{x\left(\sqrt{4+bx}+2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{b}{\sqrt{4+bx}+2} = \frac{b}{\sqrt{4}+2} = \frac{b}{4}$$

E quindi $\frac{b}{4} = 1$ da cui b = 4.