Problema N.2

Sia $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 12$

1. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha una sola radice α tale che $1 < \alpha < 2$.
   Si verifichi che $l'espressione\ x = \sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$ equivale a $f(x) = 0$.
2. Posto $x_0 = 1{,}3$ si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, x_1, x_2, x_3 ... ove è $x_{n+1} = \sqrt{\frac{4(3-x_n)}{3+x_n}}$. Cosa si può osservare? Si può congetturare che x_n , al crescere di n, approssimi sempre meglio il valore di α? In che modo? Con quali considerazioni?
3. Sia R la regione del quarto quadrante compresa fra il grafico K di $f(x)$ e gli assi del sistema di coordinate *Oxy* . Si calcoli l'area di R.
4. Si introduca un nuovo sistema di riferimento ottenuto da Oxy traslando gli assi e portando O nel punto di flesso di K. Qual è l'equazione di K nel nuovo sistema di riferimento?

1. $f(x)$è una funzione continua in R ed è monotona crescente in quanto

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4 > 0 \ \ \forall x \in R$$

Essendo $f(1) = -4 < 0 \quad mentre\ \ f(2) = 16 > 0$, per il teorema di esistenza degli zeri, f(x) ha uno zero compreso tra 1 e 2 e, per la monotonia della funzione, esso è unico.

L'equazione $f(x) = 0$ può essere scritta, dopo facili passaggi algebrici, nella forma

$$x^2(x+3) = 4(3-x) \ \ \rightarrow x \ = \pm\sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}} \ \ \text{essendo} \ \ x \neq -3$$

Poiché l'unica soluzione è compresa tra 1 e 2, quindi positiva, si può eliminare il doppio segno.

2. Si ponga F(x) = $\sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$

Applicando l'algoritmo iterativo si trovano valori approssimati (alternativamente per eccesso e per difetto) della radice α .

Osservando che deve essere α =F(α), limitandoci all'approssimazione di 2 cifre decimali, già il valore di x_3 può essere accettato

	x	F(x)	scarto
xo	1,30	1,26	0,04
x1	1,26	1,28	-0,02
x2	1,28	1,27	0,01
x3	1,27	1,27	-0,01

Interpretazione grafica dei risultati

La radice α è l'ascissa del punto A comune al grafico Γ della funzione F(x) e a quello della retta r di equazione $y = x$

Soluzione di Adriana Lanza

Studiamo l'andamento della funzione F(x) = $\sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$ individuando soprattutto gli elementi che possono essere utili per comprendere il procedimento di approssimazione illustrato in precedenza.

F(x) è definita nell'intervallo $]-3;3]$, non è mai negativa e si annulla per x=3

Poiché $\lim_{x\to -3^+} F(x) = +\infty$, la retta x=-3 è asintoto verticale

La derivata $F'(x) = \dfrac{\frac{-6}{(3+x)^2}}{\sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}}$ è negativa nell'intervallo $]-3;3[$ pertanto F(x) è decrescente,

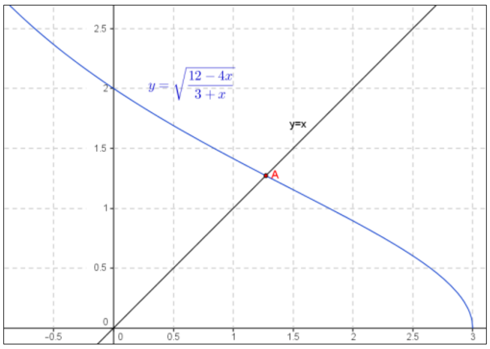
in particolare, nell'intorno di A.

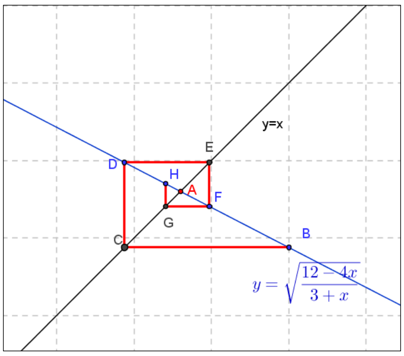
La derivata $F''(x) = 6(3-2x)\dfrac{\sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}}{(x+3)^2(x-3)^2}$ è positiva per $-3 < x < \frac{3}{2}$, negativa

$per \frac{3}{2} < x < 3$, nulla per $x = \frac{3}{2}$

Il grafico Γ della funzione F(x) cambia concavità nell'intorno del punto di ascissa $\frac{3}{2}$

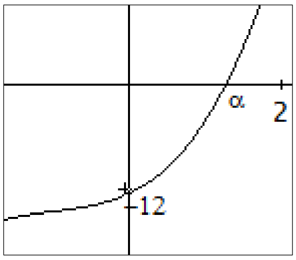
Rappresentiamo la curva Γ e la retta r in un sistema di assi cartesiani Oxy





Sostituendo a x il valore x_o= 1,3 si trova F(1,3) $\cong 1{,}26 \neq$ xo e questo prova che x_o non è uguale ad α ma ne è un valore approssimato
Il punto B(1,3; 1,26) appartiene al grafico di F(x) ma non alla retta r. (*B è prossimo al punto A ma non coincide con A).*
La parallela condotta da B all'asse x incontra la retta r nel punto C(1,26 ; 1, 26) .
La parallela condotta da C all'asse y incontra la curva Γ nel punto D(1,26 ; 1, 28*)* .
Procedendo in modo analogo si trovano alternativamente punti di Γ e punti di r sempre più prossimi al punto A.

3.Il grafico K di f(x) incontra l'asse y nel punto (0;-12) e l'asse x nel punto $(\alpha; 0)$ ed è, come è già stato osservato, sempre crescente



L'area della regione R , rappresentata in figura, è uguale a

$$\int_0^{\alpha} -f(x)dx = -\int_0^{\alpha}(x^3+3x^2+4x-12)\,\mathrm{dx} =$$

$$-\left[\frac{x^4}{4}+x^3+2x^2-12x\right]_0^{\alpha} = -\left(\frac{\alpha^4}{4}+\alpha^3+2\alpha^2-12\alpha\right) \cong 9.31$$

Il valore è stato stimato utilizzando le approssimazioni di α determinate nel punto **2**.

Soluzione di Adriana Lanza

4.Consideriamo la derivata seconda di f(x)

$$f''(x) = 6x + 6 \ \ si\ annulla\ per\ x = -1\ e\ cambia\ segno\ nel\ suo\ intorno$$

Pertanto il punto di flesso della curva K è F(-1:-14)

Sia O'XY il nuovo sistema di riferimento, ottenuto traslando gli assi in modo che il punto F diventi l'origine

Le equazioni della traslazione sono: $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 14 \end{cases}$

Sostituendo $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 14 \end{cases}$ nell'equazione $y = x^3 + 3x^2 + 4x - 12$ si ottiene

$$Y - 14 = (X-1)^3 + 3(X-1)^2 + 4(X-1) - 12 \ \ \rightarrow$$

$$Y - 14 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 + 3X^2 - 6X + 3 + 4X - 4 - 12 \rightarrow \quad Y = X^3 + X$$

Equazione di K nel nuovo riferimento $Y = X^3 + X$

OSSERVAZIONE

Una risposta più rigorosa alla questione del punto 2. dovrebbe fare riferimento al Metodo delle approssimazioni successive (o del punto fisso).

Poiché il testo del problema parla di <<osservare>> e <<congetturare>> , la soluzione degli studenti può rimanere nell'ambito delle considerazioni di tipo euristico.

Per il metodo di approssimazione citato si può consultare l'articolo del prof. Verolino "Le equazioni all'Esame di Stato" pubblicato nel Periodico della Mathesis- N.2 -2013 e presente nel sito Matmedia
http://www.matmedia.it/images/2014/articoli/Equazioni.pdf

Soluzione di Adriana Lanza