Il seguente documento è stato redatto dal gruppo di lavoro del progetto di ricerca "Learning and Understanding Capabilities: Improving Adolescent Numeracy" avente per oggetto "Studi, ricerche nell'ambito OCSE-PISA e predisposizione di materiale didattico per le esigenze del Progetto Numeracy". Scopo del documento è fornire spunti di riflessione ed indicazioni utili per migliorare la didattica della matematica al fine di innalzare i livelli di competenza degli studenti

Analisi delle prove di matematica rilasciate da OCSE-Pisa

Gruppo di lavoro *"Studi, ricerche nell'ambito OCSE-PISA e predisposizione di materiale didattico per le esigenze del Progetto Numeracy"*:

Capone Roberto

Dello Iacono Umberto

Motti Luigia

Saccomanno Federica

Responsabile Scientifico:

Russo Alessio

INTRODUZIONE

Il Progetto "*Learning and Understanding Capabilities: Improving Adolescent Numeracy*"

Finalità ed obiettivi del progetto

L'Ufficio Scolastico Regionale per la Campania[1] ha promosso, in collaborazione con alcuni Atenei della regione Campania, il "PROGETTO OCSE PISA 2015 Obiettivo 500" allo scopo di concorrere all'innalzamento delle competenze dei quindicenni campani nella comprensione e nell'utilizzo degli strumenti in literacy e numeracy. La Regione Campania ha inteso ampliare l'azione avviata dall'USR, attraverso il Piano di Azione e Coesione, III ed. ultima riprogrammazione (PAC III)[2], per la missione strategica "Istruzione, formazione e competenze, Priorità Giovani", individuando Università campane quali soggetti attuatori di progetti di ricerca-azione, da realizzarsi a cura dei Dipartimenti direttamente nelle Istituzioni Scolastiche di II grado, nell'ambito della valutazione degli apprendimenti degli studenti campani in literacy e numeracy.

In tale contesto si innesta il progetto "*Learning and Understanding Capabilities: Improving Adolescent Numeracy*", finanziato alla Seconda Università di Napoli e realizzato a cura del Dipartimento di Matematica e Fisica.
Attraverso una metodologia che, accanto alla professionalità dei docenti della Scuola, veda impegnati docenti e ricercatori dell'Università ed esperti del settore, il progetto si propone principalmente il potenziamento delle attività didattiche con particolare riferimento ai risultati di apprendimento in numeracy oggetto di misurazione delle prove **OCSE-PISA** con i seguenti **obiettivi specifici**:

- Miglioramento delle performance degli studenti nei test PISA-OCSE;
- Miglioramento delle performance degli studenti nelle prove INVALSI;
- Innalzamento delle competenze nell'ambito della numeracy;
- Costruzione di un patrimonio metodologico nelle scuole impegnate, che possa essere ulteriormente implementato e che abbia un effetto virtuoso nella Scuola nel suo insieme.

Il progetto coinvolgerà 5 Scuole Secondarie Superiori e prevede, tra altre attività, la realizzazione di laboratori rivolti agli studenti di 20 classi (4 per Istituto).

Fasi del Progetto

Il progetto è sviluppato secondo l'approccio metodologico della ricerca-azione ed è orientato ad una spiccata contestualizzazione nelle Istituzioni Scolastiche, oggetto di intervento, con diretto coinvolgimento dei docenti di classe. Esso prevede un percorso articolato in tre fasi:

[1] circolari n. 9004/U del 14/11/2013 e n. 1504/U del 27/2/2014
[2] Decreto Dirigenziale n. 765 del 3/10/2014 – invito rivolto alle Università campane per la presentazione di progetti di ricerca-azione nell'ambito della valutazione degli apprendimenti degli studenti campani in literacy e numeracy

- **Preparazione:** Costituzione del gruppo di lavoro e realizzazione delle metodologie comuni per un intervento efficace: ricerca, progettazione, selezione ed elaborazione di materiali con il contributo di docenti referenti individuati nelle Istituzioni Scolastiche;

- **Realizzazione** Attivazione di un corso di formazione per i docenti referenti delle 5 Scuole della durata di 20 ore. I docenti formati porteranno le metodologie acquisite nelle loro scuole agli altri docenti e quindi agli alunni. Tutta questa fase sarà realizzata col contributo di docenti universitari, codocenti e tutor di Scuola.

- **Diffusione dei risultati:** Monitoraggio e valutazione degli interventi didattico - formativi. Il monitoraggio si avvarrà di una interazione costante fra i referenti di progetto e il gruppo nel suo complesso. Attraverso una piattaforma informatica dedicata al termine di ogni fase ci sarà una verifica della coerenza fra azioni implementate, obiettivi attesi ed obiettivi raggiunti.

"Studi, ricerche nell'ambito OCSE-PISA e predisposizione di materiale didattico per le esigenze del Progetto Numeracy"

Il lavoro svolto dal gruppo di lavoro avente per oggetto *"Studi, ricerche nell'ambito OCSE-PISA e predisposizione di materiale didattico per le esigenze del Progetto Numeracy"* si innesta nella fase di preparazione del progetto allo scopo di fornire indicazioni e suggerimenti ai docenti formatori ed ai referenti delle scuole, utili per lo svolgimento delle fasi successive, sulla base di un'accurata analisi delle prove e dei fascicoli rilasciati da OCSE PISA nonché dei risultati conseguiti dagli studenti.

Il lavoro è stato suddiviso in più fasi.

- **FASE 1: Analisi delle prove OCSE-PISA**

E' stata effettuata una lettura critica della prove rilasciate, con particolare riferimento alle prove di matematica ed ai quesiti relativi agli altri ambiti disciplinari con ricadute nell'ambito matematico, al fine di:

a) comprendere la "tecnica" con cui sono predisposti i vari quesiti e le modalità con cui viene effettuata la correzione e la successiva valutazione
b) esplicitare, con maggiore chiarezza, per ciascuno dei quesiti:
    - Categorie di contenuto e di contesto
    - Competenze e capacità fondamentali ad esso associate
    - Criticità e punti di forza relativi sia al modo in cui il quesito è posto agli alunni (espresso in modo comprensibile oppure artificioso/ambiguo), sia alle difficoltà che essi potrebbero incontrare nei vari processi (formulare, impiegare, interpretare)
    - Analisi della struttura del fascicolo proposto agli studenti (chiarezza delle istruzioni, tempo a disposizione compatibile con la prova etc..)

c) interrogarsi non tanto sull'importanza di somministrare le stesse prove agli studenti di Paesi diversi (ciò è sicuramente necessario al fine di fornire ai sistemi scolastici dei vari Paesi elementi valutativi utili al raggiungimento di competenze omogenee, dal momento che ormai i giovani non sono più "italiani" ma "cittadini del mondo"), quanto piuttosto se i quesiti proposti siano effettivamente strutturati in modo tale da "testare" in modo corretto quanto si vuole valutare

- **FASE 2: Analisi dei risultati conseguiti dagli studenti**

In questa fase è stata effettuata un'attenta lettura dei "report" forniti, con particolare riferimento al rapporto nazionale 2012, al fine di:

a) confrontare i risultati conseguiti dagli studenti italiani con quelli dei loro coetanei non italiani
b) dall'analisi delle risposte non date o errate, evidenziare in quali "categorie di contenuto" gli studenti incontrano maggiori difficoltà ed interrogarsi sul "perché" alcune categorie risultano più ostiche da padroneggiare.
c) interrogarsi sul "modo di fare matematica" nelle scuole evidenziando aspetti quali:
    - Relazione tra indagini internazionali ed Indicazioni Nazionali/ Linee Guida fornite dal MIUR
    - Individuazione delle strategie che potrebbero essere messe in atto per consentire agli studenti italiani di essere competitivi con i loro coetanei di altri Paesi.

- **FASE 3: Fornire indicazioni e spunti di riflessione per la successiva fase di implementazione nelle scuole**

In questa fase avviene l'interazione con i docenti che lavoreranno successivamente "sul campo" con gli studenti.

a) si mostrerà ai docenti una sintesi del lavoro svolto, evidenziando le criticità rilevate
b) si forniranno materiali didattici utili all'implementazione nelle scuole (prove OCSE degli anni precedenti opportunamente analizzate)
c) sulla scorta dell'analisi critica delle prove, svolta nella fase 1, si forniranno indicazioni sulla realizzazione di nuovi quesiti che possano essere, a nostro avviso, congrui con le finalità delle indagini OCSE-PISA
d) al termine della fase di implementazione nelle scuole, si esamineranno i risultati conseguiti al fine di ottenere un "feed-back" del lavoro svolto.

Struttura del documento

Il documento redatto consta di tre capitoli:
Capitolo 1: Le prove OCSE PISA. In tale capitolo viene illustrato il substrato teorico e le motivazioni del progetto OCSE PISA, nonché il quadro di riferimento analitico per la matematica.

Capitolo 2: Osservazioni e suggerimenti. Sulla base dell'analisi delle prove e dei risultati conseguiti dagli studenti vengono illustrate le difficoltà incontrate dagli stessi e forniti indicazioni e suggerimenti volti a migliorarne le performance.

Capitolo 3: Materiali didattici. In questa sezione vengono fornite ai docenti che parteciperanno alle fasi successive del progetto le analisi svolte dal gruppo di lavoro relative sia ai quesiti che ai fascicoli rilasciati da OCSE PISA

Capitolo1

LE PROVE OCSE PISA

Le prove OCSE PISA: substrato teorico e motivazioni

Il progetto PISA (Programme for International Student Assessment) fu avviato nel 1997 da parte dei paesi aderenti all'OCSE (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico). Lo scopo era, ed è tutt'oggi, quello di monitorare l'efficacia dei sistemi scolastici vagliandone i risultati ottenuti in termini di livello di apprendimenti degli studenti, misurati all'interno di un quadro di riferimento condiviso a livello internazionale. (Quadro di riferimento PISA 2006)

Il progetto PISA si innesta in un quadro teorico molto ricco e si avvale del contributo di esperti dei Paesi aderenti garantendo che gli strumenti di valutazione adottati siano validi a livello internazionale e tengano conto del contesto culturale e curriculare dei paesi membri dell'OCSE; abbiano solide basi metodologiche; diano risalto all'azione educativa in termini di efficienza/efficacia.

L'efficacia dei sistemi scolastici è valutata attraverso la somministrazione di prove a studenti dell'età di quindici anni perché a quest'età, nella maggior parte dei paesi OCSE, gli studenti sono vicini al termine dell'obbligo scolastico e, di conseguenza, proprio in questa fase si può tentare di misurare le conoscenze, le abilità e gli atteggiamenti accumulati in quasi dieci anni di istruzione. Gli studenti non sono valutati sulle conoscenze disciplinari ma sulle competenze intese come un sistema coordinato di *conoscenze* e *abilità* che sono mobilitate dal soggetto in relazione ad uno scopo (un compito, un insieme di compiti o un'azione) che lo interessano e che favoriscono buone *disposizioni interne* motivazionali e affettive (Pellerey, 2003[3]). La scelta dei contenuti da proporre agli studenti verte sull'obiettivo di valutare negli studenti stessi quelle competenze di base indispensabili per una formazione culturale del cittadino che rispondono alle necessità etiche e sociali riconosciute e condivise come porsi e risolvere problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, creare collegamenti tra conoscenze diverse. L'idea è di riferirsi a contenuti spendibili fuori dal mondo della scuola, nella vita quotidiana, da "cittadini" più che da "studenti" (Arzarello, Robutti, 2002[4]): «Le competenze devono costituire un bagaglio (non tanto di nozioni, quanto delle abilità di risolvere situazioni problematiche, sapendo scegliere risorse, strategie e ragionamenti) per il cittadino»; si tratta quindi di individuare degli importanti contenuti che costituiscono il cuore fondante, il nucleo attorno al quale ruotano altri contenuti.

Un secondo obiettivo che si prefigge PISA è quello di poter interpretare i dati ottenuti per mettere in atto politiche efficaci a livello di indicazioni ministeriali.

Un terzo obiettivo, infine, è quello di monitorare gli sviluppi delle politiche educative stesse, qualora fossero state immesse delle riforme.

Ogni ciclo PISA si articola su quattro fasi che si svolgono nel corso di quattro anni: ideazione del test (primo anno), indagine pilota per affinare il test (secondo anno), somministrazione del test agli studenti dei Paesi

[3] M. Pellerey (2003). Le competenze individuali e il portfolio. Firenze: La Nuova Italia.
[4] F. Arzarello, O. Robutti (2002). Matematica. La Scuola.

aderenti (terzo anno), preparazione dei risultati con elaborazione dei dati a livello nazionale e internazionale (quarto anno).

Gli ambiti didattico-educativi in cui PISA ha stabilito di operare sono la literacy scientifica, la literacy in lettura, la literacy matematica e di problem solving.

PISA definisce la literacy matematica nel modo seguente: La literacy matematica è la capacità di un individuo di individuare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino impegnato, che riflette e che esercita un ruolo costruttivo.

In PISA l'ambito della literacy matematica riguarda la capacità degli studenti di analizzare, di ragionare e di comunicare idee in modo efficace nel momento in cui essi pongono, formulano, risolvono e spiegano la soluzione di problemi matematici in una molteplicità di situazioni. La rilevazione PISA focalizza l'attenzione su problemi del mondo reale e non si limita al tipo di problemi e di situazioni che generalmente si affrontano nelle aule scolastiche.

Le basi teoriche in cui sembrano innestarsi tali rilevazioni è l'idea costruttivista secondo cui tutto il processo di insegnamento-apprendimento dovrebbe basarsi sulla partecipazione attiva degli studenti nel problem-solving e lo sviluppo di un pensiero critico per quanto riguarda un'attività di apprendimento che trovano motivante e coinvolgente. Gli studenti "costruiscono" le proprie conoscenze da idee di prova e approcci basati sulla loro conoscenza e esperienze precedenti applicando queste nuove situazioni, e integrando le nuove conoscenze acquisite con costrutti intellettuali preesistenti.

Il costruttivismo prende tre vie, che a volte si intersecano tra loro:

il situated learning o anchored learning che presuppone che la maggior parte dell' apprendimento è dipendente dal contesto, in modo che le esperienze cognitive situate in attività autentiche così come l'apprendimento basato su progetti (project-based learning);

gli apprendistati cognitivi (cognitive apprenticeships) o ambienti di apprendimento basati su casi che si traducono in esperienze di apprendimento più ricche e più significative;

la negoziazione sociale della conoscenza (social negotiation of knowledge) cioè un processo attraverso il quale gli studenti testano i loro costrutti cognitivi in un dialogo con gli altri individui e, più in generale, con la società più ampia. La collaborazione ha come obiettivo principale di attività di apprendimento la negoziazione e la verifica delle competenze.

La competenza in matematica è valutata in relazione a:

1. contenuto matematico, definito in primo luogo in riferimento a quattro "idee chiave"(overarching ideas) – quantità,spazio e forma,cambiamento e relazioni,incertezza – e solo secondariamente, in relazione a taluni elementi del curricolo quali, ad esempio, i numeri, l'algebra e la geometria;
2. processi matematici, definiti attraverso le competenze matematiche generali. Fra questi, la capacità di servirsi del linguaggio matematico, quella di modellizzare e quella di risolvere problemi. Tali abilità, tuttavia, non sono verificate attraverso singoli quesiti distinti perché si parte dal presupposto che per risolvere una qualunque delle prove occorra una gamma di competenze. Al

contrario, le domande sono organizzate in termini di "raggruppamenti per competenza" (competency cluster) che definiscono il tipo di abilità di ragionamento richiesta;

3. situazioni in cui la matematica è utilizzata, definite in relazione alla loro maggiore o minore distanza dall'esperienza diretta degli studenti. A tale proposito il quadro di riferimento individua cinque situazioni: personale, scolastica, occupazionale, pubblica e scientifica. (quadro di riferimento PISA 2006)

In Pisa 2006, l'ambito prevalente di indagine è stata la literacy scientifica. Le prove erano organizzate in 13 cluster. I cluster erano costruiti in modo da richiedere circa 30 minuti per rispondere alle domande in essi contenute (pari a un quarto del tempo totale a disposizione per il test). Vi erano sette cluster di scienze, due di lettura e quattro di matematica. I cluster erano distribuiti in 13 fascicoli secondo uno schema a rotazione, ciascun fascicolo contenendo quattro cluster e a ciascuno studente veniva assegnato uno di questi fascicoli, per la cui compilazione erano date due ore. In ciascun fascicolo era presente come minimo un cluster di scienze.

In PISA 2012, i domini prevalenti sono stati matematica e problem solving. Rispetto ai precedenti cicli la definizione di queste due competenze è stata riformulata. Per competenza matematica si intende la capacità di un individuo di utilizzare e interpretare la matematica e di darne rappresentazione mediante formule, in una varietà di contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo. Per problem solving si intende la capacità di un individuo di mettere in atto processi cognitivi per comprendere e risolvere situazioni problematiche per le quali il percorso di soluzione non è immediatamente evidente. Questa competenza comprende la volontà di confrontarsi con tali situazioni al fine di realizzare le proprie potenzialità in quanto cittadini riflessivi e con un ruolo costruttivo.

Il Progetto PISA 2015 (sesta edizione di PISA), come nel 2006, il dominio principale è stata la literacy scientifica.

SINTESI DEL QUADRO DI RIFERIMENTO ANALITICO PER LA MATEMATICA (PISA 2012)

1. DEFINIZIONE DI LITERACY MATEMATICA

La literacy matematica è la capacità di una persona di *formulare, utilizzare e interpretare* la matematica in svariati contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo.

Il linguaggio usato per la definizione mira a integrare nella definizione di literacy matematica per il ciclo 2012 la nozione di modellizzazione matematica, da sempre uno dei capisaldi del quadro di riferimento di PISA per la matematica. Dato che gli studenti usano la matematica e gli strumenti matematici per risolvere problemi contestualizzati, il loro lavoro prevede una serie di passaggi. La figura 1 mostra una panoramica dei principali costrutti del presente quadro di riferimento e indica le relazioni esistenti tra essi.

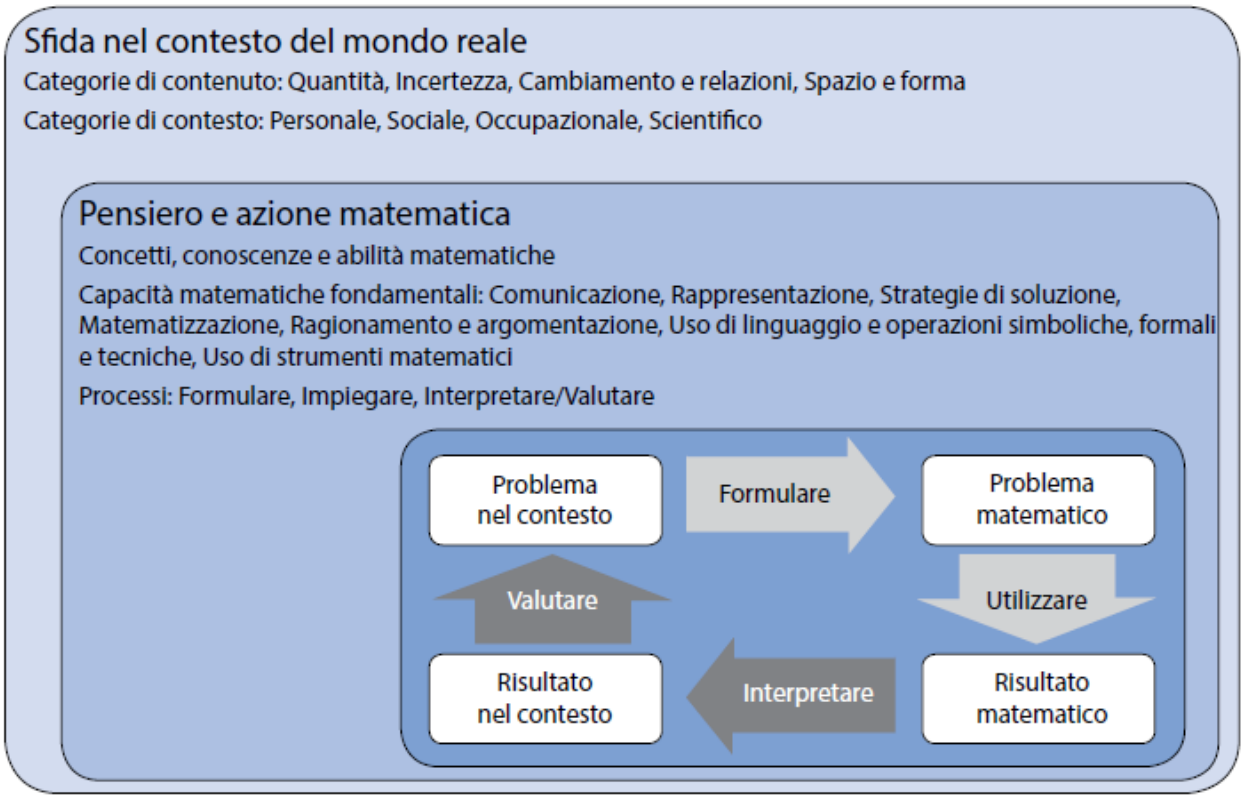


Figura 1: ciclo della modellizzazione

Il ciclo della modellizzazione è uno degli aspetti fondamentali della concezione di PISA che vede gli studenti come soggetti attivi nella risoluzione di problemi; tuttavia non è sempre necessario effettuare tutti i passaggi di tale ciclo, soprattutto nell'ambito di una rilevazione (Niss *et al*., 2007[5]). Accade spesso infatti che parti importanti del ciclo della modellizzazione matematica siano già state svolte da altri e che l'utente

[5] Niss, M., W. Blum and P. Galbraith (2007), "Introduction", in Blum, W., P. Galbraith, H.-W. Henn and M. Niss (eds.), Modelling and Applications in Mathematics Education (The 14th ICMI Study), Springer, New York, pp. 3-32.

finale compia solamente alcuni passaggi del ciclo della modellizzazione. Per esempio, in alcuni casi, le rappresentazioni matematiche, come i grafici o le equazioni, sono fornite già pronte per essere manipolate direttamente per rispondere a domande o trarre conclusioni.

2. ORGANIZZAZIONE DELL'AMBITO

Ai fini della rilevazione, la definizione di literacy matematica del ciclo 2012 può essere analizzata sulla base di tre aspetti interconnessi:

1. Processi matematici e capacità matematiche soggiacenti
2. Il contenuto matematico da utilizzare negli item
3. I contesti nei quali sono inseriti gli item

2.1. PROCESSI MATEMATICI E CAPACITÀ MATEMATICHE SOGGIACENTI

2.1.1 Processi matematici

Formulazione di situazioni in forma matematica;

Formulare è la capacità degli studenti di riconoscere e individuare le opportunità di usare la matematica e di fornire quindi una struttura matematica a un problema presentato in forma contestualizzata. Nel processo di formulazione delle situazioni in forma matematica, gli studenti determinano i punti da cui estrarre gli elementi matematici necessari per analizzare, impostare e risolvere il problema. Eseguono un processo di traslazione da un contesto reale a un ambito matematico.

Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici

Utilizzare è la capacità degli studenti di applicare concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici per risolvere problemi formulati in forma matematica e giungere a conclusioni matematiche (ad es. eseguendo calcoli aritmetici, risolvendo equazioni, facendo deduzioni logiche a partire da ipotesi matematiche, eseguendo interventi su simboli, estrapolando informazioni matematiche da grafici e tabelle, rappresentando e manipolando le forme nello spazio e analizzando i dati).

Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici

Interpretare è la capacità degli studenti di riflettere su soluzioni, risultati o conclusioni matematiche e di interpretarle nel contesto di problemi reali. Prevede la traslazione di soluzioni o ragionamenti matematici riportandoli nel contesto del problema per comprendere se i risultati siano plausibili e sensati nella situazione data.

2.1.2 Capacità matematiche fondamentali soggiacenti ai processi matematici

Il lavoro di Mogens Niss e dei suoi colleghi danesi (Niss, 2003[6]; Niss and Jensen, 2002[7]; Niss and Højgaard, 2011[8]) ha evidenziato otto capacità, definite "competenze" da Niss nel quadro di riferimento del 2003

[6] Niss, M. (2003), "Mathematical Competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project", in Gagatsis A. and S. Papastavridis (eds.), 3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education, The Hellenic

(OCSE, 2003), strumentali al comportamento matematico. Il quadro di riferimento 2012 utilizza una formulazione modificata di questa serie di capacità, riducendone il numero da otto a sette sulla base delle analisi del MEG relative all'utilizzo di tali competenze attraverso item PISA somministrati in precedenza (Turner *et al*., 2013[9]).

Le sette capacità matematiche fondamentali utilizzate nel presente quadro di riferimento sono le seguenti:

- ***Comunicazione***: la lettura, la decodifica e l'interpretazione di affermazioni, domande, compiti o oggetti permettono allo studente di costruirsi un modello mentale della situazione e questo rappresenta un passaggio fondamentale per la comprensione, chiarificazione e formulazione di un problema. Durante il processo di risoluzione, potrebbe presentarsi la necessità di riassumere e presentare i risultati intermedi. Successivamente, una volta trovata la soluzione, la persona che ha risolto il problema potrebbe dover presentare la soluzione fornendo una spiegazione o una giustificazione.
    - *Livelli*: diversi fattori determinano il livello e la portata dell'esigenza di comunicazione di un compito, e la capacità di un individuo di rispondere a tali esigenze indica fino a che punto questi padroneggia la capacità di comunicazione.
        - Dal punto di vista della ricezione, questi fattori includono la lunghezza e complessità del testo o altro oggetto da leggere e interpretare, la natura più o meno familiare delle idee o delle informazioni riportate nel testo/oggetto, la misura in cui le informazioni devono essere districate da altre informazioni, l'ordine delle informazioni e il fatto che corrisponda o meno all'ordine dei processi mentali necessari a interpretarle e utilizzarle, e la diversità degli elementi (testi, elementi grafici, diagrammi, tabelle, ecc.) da interpretare gli uni in relazione agli altri.
        - Quanto agli aspetti espressivi della comunicazione, il livello inferiore corrisponde ai quesiti che richiedono di fornire una semplice risposta numerica. La difficoltà aumenta con la necessità di fornire soluzioni più ampie, per esempio quando si richiede una spiegazione o giustificazione verbale o scritta.
- ***Matematizzazione***: la literacy matematica può prevedere la trasformazione di un problema definito nel mondo reale in una forma strettamente matematica (che può includere strutturazione, concettualizzazione, formulazione di ipotesi e/o creazione di un modello) o l'interpretazione o valutazione di un risultato o un modello matematico in funzione del problema iniziale. Il termine matematizzazione viene utilizzato per descrivere le attività matematiche fondamentali messe in gioco.
    - *Livelli*:
        - L'esigenza di matematizzazione compare nella sua forma meno complessa allorché chi deve risolvere il problema deve interpretare e dedurre direttamente da un dato modello, o traslare direttamente una situazione in forma matematica (p. es. strutturare e concettualizzare la situazione in modo pertinente, identificare e

---

Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society, Athens, pp. 115-124, http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf.

[7] Niss, M. and T. H. Jensen (2002), Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark, Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie, No. 18, Ministry of Education, Copenhagen, http://pub.uvm.dk/2002/kom/.

[8] Niss, M. and T. Højgaard (eds.) (2011), "Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark", Ministry of Education, Report No. 485, Roskilde University, Roskilde, https://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ11_MN_KOM_in_english.pdf.

[9] Turner, R. and R.J. Adams (2012), "Some drivers of test item difficulty in mathematics: an analysis of the competency rubric", Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), 13-17 April 2012, Vancouver, http://research.acer.edu.au/pisa/7/ .

selezionare le relative variabili, raccogliere misurazioni pertinenti e/o fare dei diagrammi).

- L'esigenza di matematizzazione aumenta in presenza di ulteriori requisiti di modifica o utilizzo di un dato modello per captare l'evoluzione delle condizioni o interpretare relazioni implicite; scegliere un modello familiare entro vincoli chiari ben delimitati; o creare un modello in cui variabili, relazioni e vincoli sono espliciti e chiari.
- A un livello ulteriore, l'esigenza di matematizzazione è associata alla necessità di creare o interpretare un modello in una situazione che richiede di identificare o definire numerosi presupposti, variabili, relazioni e vincoli, e di verificare che tale modello soddisfi i requisiti del compito; oppure quando si tratta di valutare o raffrontare modelli.

- ***Rappresentazione***: selezionare, interpretare, traslare e utilizzare diverse rappresentazioni per riuscire a farsi un'idea della situazione, a interagire con il problema o a presentare il proprio lavoro. Il termine rappresentazione può fare riferimento a grafici, tabelle, diagrammi, figure, equazioni, formule e materiali tangibili.
  - *Livelli:* questa capacità matematica è richiesta,
    - a livello elementare, quando si tratta di manipolare direttamente una rappresentazione familiare, per esempio passare direttamente dal testo ai numeri, o leggere un valore direttamente da un grafico o una tabella.
    - L'onere cognitivo aumenta in presenza di rappresentazioni che richiedono la selezione e l'interpretazione di una rappresentazione standard o familiare rispetto a una situazione, e
    - aumenta ulteriormente quando si tratta di utilizzare o tradurre due o più rappresentazioni rispetto a una situazione, compreso il fatto di modificare una rappresentazione; oppure quando si chiede di elaborare una rappresentazione diretta di una situazione.
    - Un livello ulteriore è segnato dall'esigenza di comprendere e utilizzare una rappresentazione non standard che richiede un sostanziale lavoro di decodifica e interpretazione; di concepire una rappresentazione che include gli aspetti principali di una situazione complessa; o di raffrontare o valutare rappresentazioni diverse.
- ***Ragionamento e argomentazione:*** questa competenza implica processi mentali basati sulla logica che permettono di analizzare e collegare gli elementi di un problema in modo tale da poterne trarre delle conclusioni, verificare una giustificazione data o fornire una giustificazione per affermazioni o soluzioni al problema.
  - *Livelli:*
    - nei compiti per i quali l'esigenza di attivazione di questa capacità è minima, il ragionamento può consistere semplicemente nel seguire le istruzioni.
    - A un livello lievemente superiore può essere richiesta qualche riflessione per collegare frammenti diversi di informazione per fare delle deduzioni (p. es. collegare componenti separate dello stesso problema, o applicare un ragionamento diretto a un aspetto del problema).
    - A un livello ulteriore può essere richiesta un'analisi delle informazioni per elaborare un'argomentazione articolata in più passaggi o collegare tra loro diverse variabili; o ancora fare un ragionamento a partire da fonti di informazione correlate.
    - Al livello di richiesta più elevato è necessario saper sintetizzare e valutare le informazioni, o utilizzare o creare ragionamenti concatenati per giustificare le supposizioni, o fare delle generalizzazioni basandosi su molteplici elementi di informazione dando loro senso e forma.

- ***Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi***: implica una serie di processi di controllo critico che orientano lo studente nel riconoscere, formulare e risolvere i problemi in maniera efficace. Tale competenza permette agli studenti di selezionare o elaborare un piano o una strategia per utilizzare la matematica nella risoluzione dei problemi posti in un compito e/o inseriti in un contesto e di metterli in atto. Questa capacità matematica può essere richiesta in qualsiasi passaggio del processo di risoluzione del problema.
    - *Livelli:*
        - nei compiti che richiedono un'applicazione minima di questa capacità spesso è sufficiente attivarsi direttamente seguendo una strategia descritta o ovvia.
        - A un livello ulteriore può essere necessario decidere una strategia adeguata tenendo conto delle relative informazioni per arrivare a una conclusione.
        - Il carico cognitivo è ulteriormente sollecitato quando occorre elaborare e attuare una strategia per trasformare le informazioni date prima di arrivare a una conclusione.
        - I compiti più difficili prevedono l'elaborazione di una strategia complessa per arrivare a una soluzione esauriente o a una conclusione generalizzata; oppure la valutazione il raffronto di diverse strategie possibili.
- ***Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni****:* comprendere, interpretare, manipolare e utilizzare espressioni simboliche in un contesto matematico (incluse espressioni e operazioni aritmetiche) retto da regole e convenzioni matematiche. Implica inoltre la comprensione e l'utilizzo di costrutti formali basati su definizioni, regole e sistemi formali, nonché l'utilizzo di algoritmi con tali entità. I simboli, le regole e i sistemi utilizzati varieranno in funzione dei contenuti matematici specifici necessari per un dato compito al fine di formulare, risolvere o interpretare gli aspetti matematici.
    - *Livelli:*
        - Nei casi più semplici non è necessario attivare regole matematiche o espressioni simboliche più complesse dei calcoli aritmetici fondamentali, e con cifre piccole o facili da elaborare.
        - Un livello superiore può richiedere calcoli aritmetici sequenziali o l'uso diretto di una semplice relazione funzionale, implicita o esplicita (p. es. relazioni lineari familiari), di simboli matematici formali (per sostituzione diretta o con una serie di operazioni aritmetiche concatenate che includono frazioni e decimali); o l'attivazione e l'uso diretto di una definizione, convenzione o concetto simbolico formale.
        - L'onere cognitivo aumenta allorché si richiede il ricorso esplicito e la manipolazione di simboli (per ricomporre una formula in modo algebrico), o l'uso di regole, convenzioni, procedure o formule matematiche mediante una combinazione di relazioni multiple o concetti simbolici.
        - A un livello superiore si richiede l'applicazione in più passaggi di procedure matematiche formali, l'impiego flessibile di relazioni funzionali o algebriche, o l'uso di tecniche e conoscenze matematiche per arrivare al risultato.
- ***Utilizzo di strumenti matematici***: gli strumenti matematici comprendono strumenti fisici, come ad es. gli strumenti di misurazione, ma anche calcolatrici e strumenti informatici oggi sempre più disponibili. Questa abilità implica la conoscenza e la capacità di utilizzo di determinati strumenti di supporto all'attività matematica nonché la consapevolezza delle limitazioni di tali strumenti. Gli strumenti matematici possono altresì rivestire un ruolo importante nella comunicazione dei risultati. Nelle precedenti indagini PISA l'uso di simili strumenti durante le prove scritte era ammesso solo in misura assai ridotta.
    - *Livello:*

- nei compiti e attività che richiedono un impiego minimo di questa capacità gli studenti potrebbero dover utilizzare direttamente strumenti familiari (uno strumento di misurazione, per esempio) in situazioni dove l'uso di tale strumento è abituale.
- La difficoltà aumenta allorché l'uso delle strumento prevede una sequenza di processi o il collegamento di informazioni dirette, o allorché gli strumenti stessi sono meno comuni o la situazione in cui si richiede l'uso dello strumento è meno familiare.
- E aumenta ulteriormente se lo strumento deve essere utilizzato per trattare e mettere in relazione elementi molteplici e diversi, se lo strumento deve essere utilizzato in una situazione assai diversa dalle sua normali applicazioni, se lo strumento stesso è complesso e permette impieghi multipli, e se è necessaria una riflessione per comprendere e valutare i meriti e i limiti dello strumento.

Tali capacità intervengono a vari livelli di ciascuno dei tre processi matematici usati per la presentazione dei risultati. La figura 2 riassume il modo in cui tali competenze si esplicitano all'interno dei processi.

Relazione tra processi matematici (prima riga in alto) e capacità matematiche fondamentali (prima colonna a sinistra)

	Formulazione di situazioni in forma matematica	Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici	Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici
Comunicazione	Leggere, decodificare e interpretare affermazioni, domande, compiti, oggetti, immagini o animazioni (nella rilevazione computerizzata) al fine di creare un modello mentale della situazione	Articolare una soluzione, illustrare il lavoro necessario per arrivare alla soluzione e/o riassumere e presentare i risultati matematici intermedi	Elaborare e comunicare spiegazioni e argomentazioni nel contesto del problema
Matematizzazione	Identificare le variabili e le strutture matematiche soggiacenti al problema reale e formulare delle ipotesi per poterle utilizzare	Utilizzare la comprensione del contesto per orientare o organizzare il processo matematico di risoluzione, ad es. lavorare con un livello di precisione adeguato al contesto	Comprendere la portata e i limiti di una soluzione matematica derivanti dall'impiego di un determinato modello matematico
Rappresentazione	Creare una rappresentazione matematica delle informazioni del mondo reale	Dare un senso, mettere in relazione e usare una molteplicità di rappresentazioni nell'interazione con il problema	Interpretare i risultati matematici in diversi formati in relazione alla situazione o all'utilizzo; confrontare o valutare due o più rappresentazioni in relazione a una situazione
Ragionamento e argomentazione	Spiegare, difendere o giustificare la rappresentazione della situazione reale elaborata o individuata	Spiegare, difendere o giustificare il processo e i procedimenti usati per determinare un risultato o una soluzione di natura matematica Collegare le informazioni per giungere a una soluzione matematica, elaborare generalizzazioni o creare argomentazioni a più livelli	Riflettere sulle soluzioni matematiche ed elaborare spiegazioni e argomentazioni che supportino, confutino o qualifichino una soluzione matematica a un problema contestualizzato
Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi	Selezionare o elaborare un piano o una strategia per inquadrare i problemi contestualizzati in forma matematica	Attivare meccanismi di controllo efficaci nel corso delle varie fasi del procedimento che porta a una soluzione, conclusione o generalizzazione matematica	Elaborare e mettere in atto una strategia finalizzata a interpretare, valutare e convalidare una soluzione matematica a un problema contestualizzato
Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni	Utilizzare variabili, simboli, diagrammi e modelli standard adeguati al fine di rappresentare un problema reale attraverso un linguaggio simbolico/formale	Comprendere e utilizzare costrutti formali basati su definizioni, regole e sistemi formali; utilizzare algoritmi	Comprendere la relazione esistente tra il contesto del problema e la rappresentazione della soluzione matematica.Usare tale comprensione per orientare l'interpretazione della soluzione nel contesto e determinarne la plausibilità e le possibili limitazioni
Utilizzo di strumenti matematici	Usare strumenti matematici per riconoscere le strutture matematiche o per delineare relazioni matematiche	Conoscere e saper utilizzare adeguatamente i diversi strumenti che possono essere utili durante i processi e i procedimenti finalizzati alla ricerca delle soluzioni	Usare strumenti matematici per accertare la plausibilità di una soluzione matematica ed eventuali sue limitazioni e restrizioni in base al contesto del problema

Figura 2: Relazione tra processi matematici (prima riga in alto) e capacità matematiche fondamentali (prima colonna a sinistra)

2.2 CONOSCENZA DEI CONTENUTI MATEMATICI

L'obiettivo di PISA è di valutare la literacy matematica e, a questo proposito, si propone una struttura organizzativa per la conoscenza della matematica basata sui fenomeni matematici che stanno alla base di ampie classi di problemi e che hanno motivato lo sviluppo di concetti e procedimenti matematici specifici. Ad esempio, fenomeni matematici come l'incertezza e il cambiamento sottendono a numerose situazioni che si verificano di frequente e sono stati dunque sviluppati strategie e strumenti matematici per analizzare tali situazioni.

L'elenco delle categorie di contenuto presentato di seguito viene dunque utilizzato in PISA 2012 nel rispetto dell'evoluzione storica, per coprire adeguatamente l'ambito della matematica e i fenomeni soggiacenti che ne hanno motivato lo sviluppo e riflettere le grandi branche dei programmi scolastici. Queste quattro categorie descrivono il contenuto matematico fondamentale della disciplina e illustrano le ampie aree di contenuto che orientano lo sviluppo degli item per il ciclo 2012:

- **Cambiamento e relazioni**: è rilevabile in contesti molto diversi, ad esempio la crescita degli organismi, la musica, il ciclo delle stagioni, gli andamenti meteorologici, i tassi di occupazione e le condizioni economiche. Alcuni aspetti matematici tradizionali delle funzioni e dell'algebra, tra cui le espressioni algebriche, le equazioni e le disequazioni e le rappresentazioni sotto forma di grafico o tabella, sono fondamentali per descrivere, modellizzare e interpretare i fenomeni di cambiamento.
- **Spazio e forma:** La literacy matematica in quest'ambito implica un insieme di attività quali la comprensione della nozione di prospettiva (ad esempio nella pittura), la creazione e la lettura di mappe, la trasformazione delle forme con o senza l'ausilio della tecnologia, l'interpretazione di scene tridimensionali osservate da prospettive diverse e la costruzione di rappresentazioni di forme.
- **Quantità:** Per procedere alla quantificazione del reale occorre comprendere misurazioni, conteggi, grandezze, unità, indicatori, dimensioni relative, tendenze e modelli numerici. Aspetti del ragionamento quantitativo – senso numerale, rappresentazioni multiple di numeri, eleganza nel calcolo, calcolo mentale, stima e valutazione della plausibilità dei risultati – sono essenziali per la literacy matematica relativa alla quantità.
- **Incertezza e dati**: richiede la comprensione del ruolo della variazione nei processi, il senso della quantificazione di quella variazione, il riconoscimento dell'incertezza e dell'errore nella misurazione e la consapevolezza della casualità. Richiede inoltre l'elaborazione, interpretazione e valutazione di conclusioni tratte in situazioni nelle quali l'incertezza è centrale. La presentazione e interpretazione dei dati sono concetti fondamentali per questa categoria (Moore, 1997). L'incertezza è presente, tra l'altro, nei pronostici scientifici, nei sondaggi, nelle previsioni del tempo e nei modelli economici. La variazione è presente tra l'altro nei processi di fabbricazione, nei punteggi dei test, nei risultati dei sondaggi, mentre la casualità è fondamentale in molte attività ricreative alle quali ci dedichiamo. Le tradizionali aree curricolari relative di probabilità e statistica offrono un mezzo formale per descrivere, modellare e interpretare una certa classe di fenomeni di incertezza, o per fare delle supposizioni. Inoltre, la conoscenza dei numeri e di elementi di algebra, grafici e rappresentazioni simboliche contribuisce a favorire la soluzione dei problemi in questa categoria di contenuto.

2.3 CONTESTI

Per il quadro di riferimento 2012 per la matematica sono state definite quattro categorie di contesti, utilizzate per classificare le prove di rilevazione messe a punto per l'indagine:

- **Personale**: I problemi classificati nella categoria di contesto personale riguardano la persona stessa, la famiglia o un gruppo di pari. Tra i contesti che si possono considerare personali possiamo

includere (ma senza limitazione) quelli relativa alla preparazione di cibo, lo shopping, i giochi, la salute personale, il trasporto personale, gli sport, i viaggi, l'agenda e le finanze personali.

- **Occupazionale:** I problemi classificati nella categoria di contesto occupazionale riguardano il mondo del lavoro. Tra i contesti che si possono considerare occupazionali possiamo includere (ma senza limitazione) elementi quali la misurazione, la valutazione del costo e l'ordinazione di materiali da costruzione, libro paga/contabilità, controllo della qualità, pianificazione/inventario, design/architettura e processi decisionali professionali.
- **Sociale:** I problemi classificati nella categoria sociale riguardano la comunità cui appartiene un individuo (sia essa locale, nazionale o globale). Può comprendere (ma senza limitazione) elementi quali sistemi elettorali, trasporti pubblici, governi, politiche pubbliche, demografia, pubblicità, statistiche ed economie nazionali. Benché un individuo sia coinvolto in tutti questi elementi in modo personale, la categoria sociale considera i problemi dal punto di vista della comunità.
- **Scientifica:** I problemi che rientrano in questa categoria riguardano l'applicazione della matematica al mondo naturale e temi e argomenti pertinenti alla scienza e alla tecnologia. Tra i contesti potremmo includere (ma senza limitazione) campi quali la meteorologia o il clima, l'ecologia, la medicina, la scienza spaziale, la genetica, le misurazioni e il mondo della matematica in sé.

3. RILEVAZIONE DELLA LITERACY MATEMATICA

Per la prova cartacea di rilevazione della literacy matematica del ciclo 2012 si utilizzano tre formati di item: a risposta aperta articolata, a risposta aperta univoca e a scelta multipla. Nella somministrazione computerizzata vengono utilizzati anche altri formati. Un ambiente informatico si presta a una maggiore varietà di modalità di risposta rispetto alla carta e penna, oltre a facilitare la rilevazione di taluni aspetti della literacy matematica, p. es. la manipolazione e la rotazione di rappresentazioni di forme tridimensionali, non facilmente valutabile su carta.

Le prove PISA di matematica sono costituite da unità che comprendono materiale di stimolo testuale e spesso altre informazioni in forma di tabelle, grafici, mappe o diagrammi, più uno o più item collegato(i) a questo stimolo. Questo formato permette di coinvolgere gli studenti in un contesto o problema rispondendo a una serie di item correlati. D'altra parte però il modello di misurazione nell'analisi dei dati PISA presuppone l'indipendenza degli item tra di loro per cui, nel caso di unità che comprendono più di un item, gli sviluppatori dei test cercano di fare in modo che tra di loro vi sia la massima indipendenza possibile. L'indagine adotta questa struttura per favorire l'uso di contesti il più possibile realistici, tali da riflettere la complessità della realtà, e nel contempo sfruttare al meglio la durata del test. È tuttavia importante garantire un'adeguata varietà di contesti per limitare al massimo che la scelta di un contesto possa essere pregiudizievole e rendere l'item il più indipendente possibile. Gli sviluppatori cercano dunque di trovare l'equilibrio tra queste due esigenze contrastanti.

Gli item selezionati per le prove dell'indagine devono presentare un'ampia gamma di difficoltà per corrispondere alle diverse abilità degli studenti partecipanti. Inoltre, per quanto possibile tutte le principali categorie della rilevazione (categorie dei contenuti, dei processi e dei contesti) sono rappresentate da item che coprono l'intera gamma delle difficoltà. I gradi di difficoltà sono determinati, tra le altre proprietà che sono misurate, nel quadro di una prova sul campo condotta prima della selezione degli item per l'indagine principale PISA. Per essere inclusi nelle prove dell'indagine PISA gli item sono selezionati in base alla loro corrispondenza al quadro di riferimento e alle loro proprietà di misurazione.

I risultati dell'indagine PISA per la matematica sono presentati in diversi modi. La stima del livello globale di competenza matematica si ottiene a partire da campioni di studenti di ciascun paese da cui si ricava una serie di livelli di competenza. Viene inoltre descritto il livello medio di literacy matematica per i diversi livelli individuati. contenuto. La figura 3 riporta i sei gradi o livelli di competenza utilizzati per la scala di

rilevazione della literacy matematica nei cicli PISA 2003, 2006 e 2009, e che costituiscono la base della scala di competenza matematica del ciclo 2012.

Livello	
6	Al livello 6 gli studenti sono in grado di concettualizzare, generalizzare e utilizzare informazioni sulla base delle loro proprie ricerche e della modellizzazione di situazioni problematiche complesse. Sanno mettere in relazione diverse fonti di informazione e rappresentazioni muovendosi al loro interno senza difficoltà. Possono fare riflessioni e ragionamenti matematici difficili. Sanno applicare la loro comprensione e intuizione con una padronanza delle operazioni e relazioni matematiche simboliche e formali che permette loro di elaborare approcci e strategie di attacco in presenza di situazioni mai incontrate prima. A questo livello, gli studenti sono in grado di formulare e comunicare con precisione le loro azioni e riflessioni in relazione ai loro risultati, interpretazioni, argomentazioni e alla loro pertinenza rispetto alle situazioni iniziali.
5	Al livello 5 gli studenti possono mettere a punto e utilizzare modelli per situazioni complesse, identificando i vincoli e specificando i presupposti. Sanno selezionare, raffrontare e valutare le strategie appropriate alla soluzione di problemi complessi in relazione a tali modelli. Sono in condizione di affrontare situazioni da un'angolazione strategica, ricorrendo a competenze ben sviluppate di ragionamento e riflessione, alle relative rappresentazioni, caratterizzazioni simboliche e formali con una comprensione approfondita di tali situazioni. Riflettono sulle loro azioni e sanno formulare e comunicare le loro interpretazioni e il percorso seguito nel ragionamento.
4	Al livello 4 gli studenti sanno lavorare efficacemente con modelli espliciti di complesse situazioni concrete che possono comportare vincoli e richiedere deduzioni. Possono selezionare e integrare rappresentazioni di tipo diverso, anche simboliche, collegandole direttamente a situazioni del mondo reale. A questo livello, in questi contesti, gli studenti sono in grado di utilizzare competenze ben sviluppate e flessibilità di ragionamento, con un certo grado di profondità di comprensione. Possono elaborare ed esprimere argomentazioni e spiegazioni delle loro interpretazioni e azioni.
3	Al livello 3 gli studenti sono in grado di seguire procedure chiaramente descritte, comprese procedure che richiedono decisioni in sequenza. Sanno selezionare e applicare semplici strategie per risolvere problemi. A questo livello possono interpretare e utilizzare rappresentazioni a partire da fonti di informazione diverse e costruire un ragionamento su questa base. Sono in grado di elaborare comunicazioni succinte per presentare i loro risultati, interpretazioni e ragionamenti.
2	Al livello 2 gli studenti sono in grado di interpretare e riconoscere situazioni in contesti che richiedono al massimo deduzioni dirette. Possono ricavare informazioni pertinenti da un'unica fonte e utilizzare una sola modalità di rappresentazione. Sono in grado di utilizzare algoritmi, formule, procedure o convenzioni elementari. Possono fare un ragionamento diretto e fornire un'interpretazione letterale dei loro risultati.
1	Al livello 1 gli studenti sanno rispondere a domande inserite in un contesto familiare dove tutte le informazioni sono esplicite e ciò che si chiede loro è chiaramente definito. Sono in grado di identificare informazioni ed eseguire procedure di routine seguendo istruzioni dirette in situazioni esplicite. Possono eseguire azioni ovvie derivanti direttamente dallo stimolo somministrato.

Figura 3: Descrizioni dei livelli di competenza matematica (cicli 2003-2009)

SINTESI

L'obiettivo di PISA per quanto attiene alla literacy matematica è di mettere a punto indicatori che possano mostrare il grado di efficacia con la quale i diversi paesi preparano gli studenti all'utilizzo della matematica nei vari aspetti della loro vita personale, civile e professionale, in qualità di cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi. A questo proposito, PISA ha sviluppato una definizione di literacy matematica e un quadro di riferimento che riflette le componenti più importanti di tale definizione. Gli item messi a punto e selezionati per il ciclo 2012, basati sulla definizione e sul quadro di riferimento, intendono riflettere in modo equilibrato i processi, contenuti e contesti matematici. Devono infatti contribuire a determinare la capacità degli studenti di applicare quanto appreso. Tali item chiedono agli studenti di utilizzare le loro conoscenze avviando dei processi e mettendo in pratica le loro capacità di risolvere problemi basati sull'esperienza del mondo reale. I problemi sono presentati in diversi formati con vari livelli di strutturazione e orientamento, ma l'enfasi è posta su problemi autentici, sui quali gli studenti devono riflettere da soli.

Capitolo 2

OSSERVAZIONI E SUGGERIMENTI

Osservazioni relative all'analisi delle risposte degli studenti

Negli ultimi anni è molto acceso il dibattito relativo all'effettiva validità delle prove OCSE PISA, sottolineandone le criticità e ponendosi la domanda: "le prove misurano realmente ciò che si prefiggono di misurare?", in altri termini: "i quesiti proposti sono effettivamente strutturati in modo tale da "testare" in modo corretto quanto si vuole valutare?".

Il progetto PISA si prefigge sostanzialmente **tre obiettivi**:

- il primo è di "individuare indicatori comparabili a livello internazionale su studenti della stessa età (15 anni) per **verificare se i sistemi di educazione siano capaci di preparare i giovani ad affrontare la vita civile e lavorativa"**;
- un secondo è quello di poter "interpretare i dati ottenuti per **mettere in atto politiche efficaci a livello di indicazioni ministeriali"**;
- un terzo infine è quello di "**monitorare gli sviluppi delle politiche educative stesse**, qualora fossero state immesse delle riforme".

E' indubbia la necessità di confrontare le competenze raggiunte dagli studenti nei vari Paesi. Ciò non al fine di classificare e etichettare alunni, insegnanti e dirigenti, né tantomeno di ridurre l'autonomia degli insegnanti e di aumentare i livelli di stress nelle scuole (come sostengono i detrattori delle prove OCSE), quanto piuttosto per far sì che tra i vari sistemi scolastici si instauri un sistema di collaborazione, al fine di istituire delle "buone pratiche" che consentano di ridurre il divario tra studenti di Paesi diversi (dal momento che ormai i giovani non sono più "italiani" ma "cittadini del mondo"), ma anche di aree geografiche diverse all'interno dello stesso Paese. In Italia, negli ultimi anni, le prestazioni fornite dagli studenti alle varie gare disciplinari (escluse punte di eccellenza, peraltro sempre più rare) sono calate notevolmente, in particolare sempre più raramente studenti del Sud Italia riescono ad ottenere dei buoni piazzamenti. Ovviamente ci si chiede: "è importante vincere una gara?"… sicuramente non è la cosa più importante, ma è un indice del livello di competenze raggiunto dagli studenti. Confrontando non solo i risultati ottenuti ai test PISA, ma anche quelli ottenuti alle gare disciplinare e ai test di accesso alle facoltà universitarie più prestigiose, si nota come gli studenti del Nord Ovest e Nord Est la "facciano da padrone", mentre gli studenti del Sud e delle isole siano il "fanalino di coda". Ciò influenza senz'altro negativamente il futuro inserimento nella società e l'accesso al mondo del lavoro.

Da un'attenta analisi delle prove PISA rilasciate si evidenzia come i quesiti siano formulati in modo tale che anche gli studenti che non possiedono specifiche conoscenze disciplinari, leggendo attentamente lo stimolo fornito, possono essere tranquillamente in grado di fornire la risposta corretta. Pertanto i quesiti sono formulati in modo tale da testare davvero la capacità posseduta o meno dallo studente di risolvere un problema reale, tratto da esperienze di vita quotidiane,

utilizzando le abilità di lettura ed interpretazione di un testo (estrapolando da esso le informazioni utili e quelle fuorvianti), la capacità di individuare dati ed incognite, il problem solving.

Quello che si evidenzia dai risultati conseguiti, purtroppo, è soprattutto la sempre minore capacità degli studenti di leggere e comprendere un testo scritto (spesso la risposta è omessa o errata, perché non è stata ben compresa "la consegna") e di argomentare (anche se si riesce ad individuare la risposta corretta, non si riesce a fornire una spiegazione del ragionamento seguito). Ciò potrebbe essere dovuto anche al fatto che negli ultimi anni i ragazzi leggono sempre di meno, si fa sempre meno ricorso alla scrittura (praticamente sono "scomparse" lettere e/o cartoline a favore di sms in cui spesso si usano abbreviazioni al posto della parole). Grazie al web, i ragazzi non hanno più bisogno di "fare una ricerca", per la quale è richiesta la capacità di selezionare la fonte e le informazioni utili, nonché di effettuare analisi e sintesi dei materiali trovati.

Molto spesso, inoltre, gli studenti si limitano a non compilare il questionario o a fornire risposte a caso alle domande poste, in quanto non comprendono lo scopo e l'utilità di tale indagine, considerandola solo un modo per evitare una "mattinata di lezione". Ciò è acuito talora, purtroppo, anche dall'atteggiamento mostrato da qualche docente, non correttamente informato sulle finalità educative di tale progetto e che lo interpreta, pertanto, come un'ingerenza nel proprio lavoro e nel tentativo di intervenire a gamba tesa nella sua autonomia d'insegnamento.

Certamente un fattore importante di cui tener conto è la situazione socio-economica degli studenti. E' indubbio che nelle aree geografiche del Nord-Est e del Nord-Ovest non si vive il disagio sociale, culturale ed economico che si registra in molte regioni del Sud e che porta ad una forte demotivazione nei confronti della scuola, che non è più vista come "ascensore sociale" e "trampolino di lancio" verso il mondo del lavoro, dal momento che le possibilità di lavoro sono piuttosto esigue. Sempre più genitori delegano l'educazione dei propri figli alla scuola, disinteressandosi della loro reale preparazione e ponendosi solo il problema, alla fine dell'anno, della promozione all'anno successivo indipendentemente dall'impegno profuso dallo studente e dalle competenze acquisite o meno. Ciò costringe molti insegnanti a svolgere in pratica il "lavoro di assistente sociale" (in particolar modo negli istituti professionali) e meno quello di "docente". Di conseguenza si abbassa sempre più il livello medio di insegnamento/apprendimento e si ha sempre meno tempo, in classe, da dedicare alla valorizzazione delle eccellenze a vantaggio del recupero delle competenze di base. Anche le risorse disponibili nelle scuole in cui è presente un maggior disagio sociale sono inferiori a quelle possedute in scuole in cui è presente un'utenza di livello sociale più elevato e ciò contribuisce a fornire meno stimoli ed a aumentare il divario già esistente.

In sintesi sarebbe auspicabile:

1. Una campagna di informazione/sensibilizzazione rivolta, non solo agli studenti, ma anche ai docenti per far comprendere come queste prove non debbano essere viste come un modo per "giudicare l'operato del docente" né la "bravura dello studente", quanto piuttosto uno

strumento, che si affianca a tutti gli altri messi in atto quotidianamente nelle classi per fornire agli studenti la "cassetta degli attrezzi" da utilizzare, poi, nella vita quotidiana.

2. Organizzare iniziative di formazione per i docenti al fine di migliorare il modo di "fare matematica in classe" con particolare riferimento ad aspetti quali:
   - Le Indicazioni Nazionali *"… sono state calibrate tenendo conto delle strategie suggerite nelle sedi europee ai fini della costruzione della "società della conoscenza", dei quadri di riferimento delle indagini nazionali e internazionali e dei loro risultati (rilevazioni OCSE), stabilendo di volta in volta le possibili connessioni interdisciplinari, elencando i nuclei fondamentali di ciascuna disciplina e cercando di intervenire sulle lacune denunciate dalle rilevazioni sugli apprendimenti…" "…Conoscere non è un processo meccanico, implica la scoperta di qualcosa che entra nell'orizzonte di senso della persona che "vede" , si "accorge", "prova", "verifica", "percepisce". Non è (non è mai stata) la scuola del nozionismo a poter essere considerata una buona scuola. Ma è la scuola della conoscenza a fornire gli strumenti atti a consentire a ciascun cittadino di munirsi della cassetta degli attrezzi e ad offrirgli la possibilità di sceglierli e utilizzarli nella realizzazione del proprio progetto di vita...*"

     La domanda da porsi, quindi, è: "E' davvero quello che si fa in classe?". Quanti docenti, ad esempio, nel parlare con i propri studenti degli insiemi numerici o delle equazioni algebriche, dedicano ore ed ore allo svolgimento di noiose e ripetitive espressioni/equazioni o disequazioni, invece di dedicare ampio spazio a far loro comprendere come, quando e perché utilizzarle? Quanti docenti propongono agli studenti problemi tratti dalla vita quotidiana risolubili mediante le loro conoscenze matematiche? In questo modo si risponderebbe subito alla domanda "a cosa mi serve studiare la matematica?", posta spesso non tanto dagli studenti liceali, quanto da quelli degli Istituti Tecnici e Professionali il cui scopo primario è inserirsi prima possibile nel mondo del lavoro e che vedono, dunque, la matematica come una disciplina astratta, avulsa dalla realtà.
   - Tentare di individuare quali strategie potrebbero essere messe in atto per consentire agli studenti italiani di essere competitivi con i loro coetanei di altri Paesi. Ciò, ovviamente, non può concretizzarsi semplicemente con il sottoporre agli studenti le prove degli anni precedenti e spiegare loro come "avrebbero dovuto rispondere", ma aiutando gli studenti ad imparare a "fare matematica" e utilizzarla nella vita reale.
   - In sintesi, cercare di comprendere come la scuola possa contribuire a ridurre la percentuale, tuttora molto elevata (circa il 47% degli italiani), dei cosiddetti "analfabeti funzionali"[10], ovvero individui che, pur essendo perfettamente capaci di "leggere e far di conto", non sono in grado di comprendere appieno il senso di quello che leggono nè di usare in modo efficiente le abilità di lettura, scrittura e calcolo nelle situazioni della vita quotidiana.

[10] In base ad un'indagine condotta nell'ambito del progetto ALL "*Adult Literacy and Lifeskills"*, (ricerca comparativa internazionale promossa dall'OCSE), si è evidenziato che nel periodo 2003-2004, su un campione della popolazione italiana di età compresa tra 16 e 65 anni, il 46,1% è al primo livello, il 35,1% è al secondo livello e solo il 18,8% è ad un livello di più alta competenza.

3. Cercare di intervenire a livello motivazionale, rivalutando il ruolo della scuola nella società e facendo comprendere agli studenti come il proprio bagaglio culturale e le competenze acquisite durante il percorso di studi siano una ricchezza inestimabile, che li accompagnerà per il resto della vita e consentirà loro di farsi strada nel mondo del lavoro, sia esso in Italia o in un altro Paese.

Indicazioni operative per la redazione di ulteriori prove

Negli ultimi anni la rilevazione delle competenze degli studenti sta acquisendo sempre maggiore importanza, in sintonia con gli obiettivi stabiliti nel 2000 a Lisbona. In tale contesto si inseriscono le indagini nazionale ed internazionali **INVALSI, OCSE PISA, TIMMS** (Trends in International Mathematics and Science Study). In Italia, in particolare le indagini INVALSI *"assumono valore strategico in quanto concorrono al raggiungimento degli obiettivi fissati dall'Unione Europea in materia di istruzione e formazione, correlati al "processo di Lisbona", avviato nel 2000, e con più specifico riguardo alla qualità dei livelli di apprendimento. Esse si inseriscono nel più ampio contesto internazionale, sia in tema di indagini internazionali comparative sulla qualità dei sistemi nazionali di istruzione e sui livelli di apprendimento degli studenti, con riferimento alle metodiche adottate e ai risultati conseguiti, sia in tema di promozione della cultura della valutazione"*[11].
Quanto segue vuole essere, pertanto, un utile strumento che consenta ai docenti di predisporre prove da somministrare ai propri studenti al fine di guidarli nel processo di sviluppo delle competenze necessarie per applicare ciò che hanno imparato a situazioni reali.
Facendo riferimento al "Quadro di riferimento per la matematica –PISA 2012", sarebbe opportuno predisporre quesiti di diversa tipologia (vero/falso, scelta multipla, risposta aperta univoca, risposta aperta articolata) costituiti da:

- **Stimolo iniziale:** costituito da un testo esteso, una o più immagini oppure grafici, relativi a situazioni di vita reale di fronte alle quali lo studente può trovarsi in momenti diversi (durante un viaggio, a scuola ad esempio nel corso dell'elezione dei rappresentanti di classe, durante i momenti di svago quali uscite con gli amici/concerti/sport).
  Inizialmente sarebbe opportuno formulare lo stimolo iniziale in modo chiaro, rendendo esplicite le variabili in gioco e le relazioni che intercorrono tra esse. Successivamente, man mano che si rileva un miglioramento delle competenze acquisite dagli studenti, si possono rendere sempre meno esplicite le informazioni oppure fornire dati insufficienti, in modo che gli studenti debbano fare delle deduzioni autonome.

- **Individuazione del contesto:** personale, sociale, occupazionale, scientifico

- **Formulazione di una o più domande inerenti lo stimolo fornito:** anche in questo caso sarebbe opportuno formulare inizialmente domande alle quali sia possibile fornire una risposta immediata e poi, in un secondo momento, porre domande per le quali siano

[11] MIUR – Direttiva n.74 – 15 settembre 2008

necessari processi di matematizzazione ed elaborazione di strategie opportune, con l'utilizzo, possibilmente, di un linguaggio simbolico.

Dal momento che è evidente come gli studenti italiani mostrino molte difficoltà nella capacità di argomentare le scelte fatte, sarebbe opportuno prevedere (anche in presenza di domande del tipo vero/falso o a risposta multipla) una richiesta di motivazione della risposta fornita

- **Individuazione del livello di difficoltà dell'item:** inizialmente si potrebbe indicare il livello di difficoltà in maniera orientativa, inquadrandolo in uno dei sei livelli di competenza matematica individuati da OCSE PISA. Dall'analisi dei risultati ottenuti dagli studenti, si verificherà, poi, se il livello attribuito è congruo con le difficoltà mostrate dagli studenti durante lo svolgimento della prova.

- **Individuazione di concetti, conoscenze ed abilità matematiche** che potrebbero essere utili per la formulazione della risposta corretta. La risposta al quesito dovrebbe, tuttavia, poter essere fornita anche senza il possesso di specifiche conoscenze matematiche**,** ma semplicemente in base all'intuito dello studente.

- **Individuazione di capacità fondamentali e processi coinvolti** tra quelli individuati nel quadro di riferimento

- **Item analysis**[12] necessaria per ottenere informazioni sulla correttezza e chiarezza dei quesiti formulati. «*L'ipotesi di partenza di questa tecnica è che se la prova è valida ed affidabile, le prestazioni del gruppo sottoposto a test saranno in qualche modo coerenti. Si assume cioè che chi ha ottenuto un alto punteggio nel test debba aver risposto correttamente a ciascun item. Se, analizzando le risposte a un item, si verifica che hanno risposto male, per esempio, proprio quei soggetti che hanno ottenuto al test un punteggio complessivo alto, è necessario allora riconsiderare con cautela sia la formulazione dell'item sia la sua validità nell'economia del test.*»[13]
  A tal fine potrebbe essere utile calcolare l'***indice di facilità***[14] della domanda:

$$f = \frac{\text{Risposte esatte}}{\text{Totale studenti}}$$

ovvero il rapporto tra le risposte esatte che sono state date a quella determinata domanda e il numero di studenti che hanno risposta a quella domanda. Se l'indice è superiore a 0,75

[12] Andrea Marco De Luca, Pietro Lucisano *"Item analisi tra modello e realtà"* Giornale Italiano della Ricerca Educativa • IV • 7 / DICEMBRE • 2011
[13] P. Lucisano *et al.* (1989) "*Lettura e comprensione"* – Scienze dell'educazione 36, Loescher, Torino.
[14] Vijaya Krishnan, Ph.D. "*The Early Child Development Instrument (EDI): An item analysis using Classical Test Theory (CTT) on Alberta's data*", January 2013, V. Krishnan

o inferiore a 0,25, la domanda dovrebbe essere scartata perché troppo facile o troppo difficile.

Un altro indice importante da determinare sarebbe, poi, **l'*indice di discriminatività d*.** Tale indice permette di valutare se una domanda, costruita per valutare una determinata abilità, consente di distinguere chi possiede questa abilità e chi non la possiede.

Per effettuare questo calcolo è necessario ordinare gli studenti della classe in ordine crescente di punteggio e suddividere la classe in tre fasce. Quindi per ogni domanda si confrontano il numero delle risposte esatte (a quella determinata domanda) degli studenti che appartengono all'estremo superiore (R esatte$_{e.s}$). con quello degli studenti che appartengono all'estremo inferiore (R esatte$_{e.i}$) . L'indice ***d*** è dato, quindi da:

$$d = \frac{\text{R esatte}_{\text{e.s.}} - \text{R esatte}_{\text{e.i.}}}{\text{numero studenti di un estremo}}$$

Questo indice varia da -1 (se hanno risposto in modo corretto a quella domanda tutti gli studenti dell'estremo inferiore, ma nessuno dell'estremo superiore) a + 1 (se hanno risposto in modo corretto a quella domanda tutti gli studenti dell'estremo superiore, ma nessuno dell'estremo inferiore). La discriminatività di una domanda dovrebbe essere superiore a 0,30. Valori negativi non sono accettabili mentre valori compresi tra 0 e 0,30 denotano che la domanda ha qualche punto di criticità.

Il calcolo di questi due indici è estremamente importante in quanto consente di giudicare se la prova messa a punto funziona oppure no e, quindi, apportare, se necessario, le dovute modifiche.

Naturalmente compito del docente non dovrà essere semplicemente quello di "allenare" gli studenti a rispondere correttamente alle prove standardizzate ("*teaching to test*"), in quanto ciò risulterebbe riduttivo e porterebbe alla generazione di "automatismi", a svantaggio della creatività degli studenti e della loro capacità di problem solving. Al contrario tali prove dovranno essere utilizzate come un utile strumento (un valore aggiunto) da affiancare ai tanti altri già comunemente utilizzati durante le attività, per orientare la didattica della matematica verso la costruzione di competenze e non solo verso la conoscenza astratta degli argomenti che costituiscono il curricolo scolastico.

Capitolo 3

MATERIALI DIDATTICI

Nella pagine che seguono vengono riportati i vari quesiti di matematica rilasciati da OCSE PISA ed attentamente analizzati dal gruppo di lavoro al fine di esplicitarne contesto, categorie di contenuto, capacità e processi coinvolti, criticità. Per ciascun quesito, inoltre sono state analizzate anche le percentuali di risposte fornite dagli studenti, con particolare riferimento alle risposte fornite dagli studenti del Sud che sono state confrontate con le medie Nazionali ed Internazionali. Si riporta anche l'analisi della struttura di un fascicolo completo[15] somministrato allo studente.

ANALISI DI UN FASCICOLO COMPLETO OCSE PISA

Il fascicolo somministrato allo studente è compilato in forma anonima. Ad ogni studente, infatti, viene assegnato un "codice studente" e l'unica informazione richiesta è la data di nascita.

La prima parte del fascicolo è costituita da un breve "*formulario*", contenente informazioni quali determinazione dell'area di un rettangolo o di un cerchio, misura della lunghezza di una circonferenza, teorema di Pitagora. Ciò sottolinea la scarsa importanza attribuita alle pure conoscenze scolastiche relative ai contenuti curriculari trattati nel corso di studi. L'attenzione è piuttosto focalizzata sulla capacità degli studenti quindicenni di utilizzare competenze acquisite durante il percorso scolastico in modo da affrontare e risolvere problemi e compiti che si incontrano nella vita quotidiana, al fine di svolgere un ruolo consapevole e attivo nella società e continuare ad apprendere per tutta la vita (*lifelong learning*).

Al formulario segue una sezione dedicata alle "*istruzioni generali*" in cui sono descritte le varie tipologie di domande presenti nella prova, corredate ciascuna da un esempio di domanda, con indicazione della modalità con cui deve essere fornita la risposta. Viene, perfino, indicato come effettuare una correzione in caso in cui lo studente, dopo aver fornito una data risposta, successivamente cambi idea e decida di fornire una risposta differente. Le istruzioni sono fornite in maniera fin troppo dettagliata, tenuto conto del fatto che gli studenti dovrebbero già essere stati abituati a tali tipologie di quesiti e che, nella maggior parte dei casi, all'interno delle singole domande è nuovamente indicato come fornire la risposta. Tuttavia, poiché a tutti gli studenti deve essere garantito l'accesso alle stesse informazioni in modo che essi si trovino nelle medesime

[15] http://www.invalsi.it/download/BOOKLET1_DEFINITIVO.pdf
e http://www.invalsi.it/download/BOOKLET2_definitivo.pdf

condizioni iniziali, una descrizione dettagliata e minuziosa di ciò che è loro richiesto risulta utile al fine di omogeneizzare la situazione di partenza. D'altronde anche la capacità di comprendere le istruzioni è una competenza che gli studenti dovrebbero possedere.

Seguono, poi, le varie domande, suddivise per ambiti d'indagine: lettura, scienze, matematica, cui possono aggiungersi "*problem solving informatizzato*" e "*financial literacy*". I due esempi di prove OCSE PISA rilasciati sono costituiti uno da 57 domande, l'altro da 58 domande, così suddivise:

- Scienze: domande 1-14
- Lettura: domande 15-37
- Matematica: domande 38-57/58

Dal momento che la prova deve essere completata in 120 minuti, si evince come gli studenti abbiano a disposizione, in media, circa 2.1 minuti per ciascuna domanda. Tale tempo è piuttosto scarso, considerato che lo stimolo è, spesso, un articolo (Lettura) oppure la descrizione di un esperimento/fenomeno scientifico o di un problema tratto dalla vita quotidiana (Matematica /Scienze), che lo studente deve leggere attentamente in modo da comprendere quali siano i dati forniti, le variabili in gioco e le incognite. Ciò è testimoniato dall'elevato numero di risposte omesse o non raggiunte (nel senso che lo studente non ha avuto il tempo di leggere la domanda) anche relativamente a items di basso livello di difficoltà.

Analisi dei quesiti di matematica rilasciati da OCSE PISA

IDEA CHIAVE: Quantità

1. SKATEBOARD

Stimolo:

Enrico è un grande appassionato di skateboard. Visita un negozio che si chiama SKATER per controllare alcuni prezzi. In questo negozio puoi comprare uno skateboard completo, oppure puoi comprare una tavola, un set di 4 rotelle, un set di 2 blocchi e un set di accessori per montare il tuo skateboard. I prezzi dei prodotti del negozio sono:

Prodotto	Prezzo in zed	
Skateboard completo	82 o 84	
Tavola	40, 60 o 65	
Un set di 4 rotelle	14 o 36	
Un set di 2 blocchi	16	
Un set di accessori (cuscinetti a sfera, placchette di gomma, dadi e viti)	10 o 20	

Descrizione e contesto:

Il contesto della prova è **personale**. Infatti il problema riguarda un "gruppo di pari", ovvero la popolazione giovanile di sesso prevalentemente maschile che pratica tale sport. Lo studente si trova di fronte ad una situazione pratica di "vita reale" in cui si trova a dover scegliere cosa acquistare, in base alla convenienza ed alle proprie potenzialità economiche. Nella tabella, di immediata consultazione, sono riportati sia i prezzi di uno skateboard completo, che i prezzi dei singoli pezzi necessari per assemblarlo.

Domanda 1

Enrico vuole montare da solo il suo skateboard. In questo negozio, qual è il prezzo minimo e il prezzo massimo degli skateboard «fai da te»?
(a) Prezzo minimo: .....zed
(b) Prezzo massimo: .....zed

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 21: Fornisce la risposta corretta sia per il prezzo minimo (80) che per il prezzo massimo (137).
Punteggio parziale
Codice 11: Fornisce solo il prezzo minimo (80) corretto.
Codice 12: Fornisce solo il prezzo massimo (137) corretto.
Nessun punteggio
Codice 00: Altre risposte
Codice 99: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

punteggio pieno 496 (Livello 3 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica). A questo livello, infatti, lo studente deve essere in grado di seguire procedure chiaramente descritte, comprese procedure che richiedono decisioni in sequenza nonchè selezionare e applicare semplici strategie per risolvere problemi. Deve, pertanto, essere in grado di leggere ed interpretare i dati forniti nella tabella al fine di individuare qual è il costo minimo e massimo di uno skateboard da assemblare.

punteggio parziale 464 (Livello 2 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica). Lo studente è in grado di interpretare e riconoscere situazioni in contesti che richiedono al massimo deduzioni dirette, ricavare informazioni pertinenti da un'unica fonte e utilizzare una sola modalità di rappresentazione. E' capace di utilizzare algoritmi, formule, procedure o convenzioni elementari. Riesce, pertanto, ad individuare una soltanto delle risposte esatte.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare.

Abilità matematiche*:* Il quesito richiede semplicemente di prendere nota dei prezzi minimi dei singoli prodotti al fine di ottenere il costo minimo di uno skateboard completo e ripetere la stessa operazione per i prezzi massimi.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al solo processo di "formulazione in forma matematica", in quanto è solo richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti nella tabella
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione di problemi:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione", in quanto lo studente deve elaborare la strategia che lo porterà a fornire la soluzione corretta.

Analisi item

La domanda è del tipo "aperta a risposta univoca", in quanto esiste una sola risposta corretta, sia per la a) che per la b). La suddivisione in livelli differenti, sembra alquanto "forzata", dettata solo dalla necessità di differenziare i punteggi ottenuti per risposta parziale o totale. Infatti per rispondere ai quesiti a) e b) non sono richieste capacità diverse, ma la semplice "lettura" dei dati della tabella. Se lo studente risulta in grado di individuare il costo minimo per ogni pezzo e sommarli per ottenere il costo totale, dovrebbe essere in grado di effettuare la stessa procedura anche per il costo massimo. Sarebbe stato, forse, preferibile formulare due domande distinte ed associarle allo stesso livello di difficoltà (livello 2), in quanto l'algoritmo da utilizzare è di tipo elementare.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M520Q01T - Skateboard (dati derivanti dalla combinazione dei quesiti M520Q1A e M120Q01B)

	Risposta 0	*Risposta 1*	***Risposta 2***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**
Nord Ovest	13,3	10,7	**69,5**	2,2	3,0	1,3
Nord Est	13,5	11,8	**70,2**	1,8	2,2	0,5
Centro	21,6	11,6	**60,0**	2,8	2,1	1,8
Sud	20,6	13,0	**52,7**	6,0	5,8	2,0
Sud Isole	27,4	11,9	**48,5**	4,2	4,2	3,8
ITALIA	*19,5*	*11,8*	***59,6***	*3,5*	*3,6*	*1,9*
OCSE	*17,8*	*10,4*	***65,9***	*4,6*		*1,3*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.
** La risposta 1 è parzialmente corretta.

Nonostante il livello non particolarmente elevato di difficoltà dell'item, solamente poco più della metà degli studenti del Sud è riuscito a fornire la risposta esatta ad entrambe le domande. Probabilmente dalla tabella risulta più evidente

"leggere" i prezzi minimi, piuttosto che quelli massimi, dei singoli materiali. Si registra, inoltre, una percentuale di risposte omesse nettamente superiore rispetto alle altre Aree geografiche.

Domanda 2

Il negozio offre tre tipi diversi di tavole, due tipi di set di rotelle diversi e due tipi di set di accessori. C'è solo una possibilità per il set di blocchi. Quanti skateboard diversi può costruire Enrico?
A 6
B 8
C 10
D 12

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: D - 12
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

570 (Livello 4 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica). A questo livello lo studente deve essere in grado di lavorare efficacemente con modelli espliciti di complesse situazioni concrete che possono comportare vincoli e richiedere deduzioni. Deve essere capace di utilizzare competenze ben sviluppate e flessibilità di ragionamento, con un certo grado di profondità di comprensione, Infatti allo studente è richiesto di individuare tutte le possibili combinazioni di pezzi diversi (il set di blocchi è fissato) in modo da realizzare skateboard di tipologie e prestazioni differenti.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare.
Abilità matematiche*:* Il quesito non richiede particolari abilità matematiche, se gli studenti scelgono la strada più immediata, ovvero provare a comporre tra loro i vari pezzi. Richiede, invece, la capacità di collegare tra loro il numero di possibili tipologie di prodotti disponibili ed il numero di skateboard diversi che possono essere costruiti, nel momento in cui si vuole provare a "generalizzare" il problema.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al solo processo di "formulazione in forma matematica", in quanto è solo richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti nella tabella
- **Matematizzazione:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione", nell'identificazione delle variabili e nella comprensione del contesto
- **Rappresentazione:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione". Occorre, infatti, creare una rappresentazione matematica delle informazioni e metterle in relazione tra loro
- **Elaborazione di strategie:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione". Lo studente deve essere, infatti, in grado di elaborare la strategia che gli consenta di individuare il numero possibile di combinazioni dei materiali disponibili ed attivare gli opportuni meccanismi di controllo al fine di fornire la soluzione corretta.

Analisi item

La domanda, posta in maniera chiara, è del tipo a "scelta multipla" con una sola risposta corretta. La difficoltà principale per lo studente è relativa al processo di elaborazione della strategia che conduce alla soluzione del problema. Infatti la maggior parte degli studenti, probabilmente, di fronte ad un problema del genere si limita a "contare" i possibili modi di comporre i vari pezzi. Solo una parte della popolazione studentesca arriverà alla formulazione della strategia più "rapida" (moltiplicare tra loro il numero di tavole, rotelle ed accessori possibili). In Italia, infatti, solo il 33% degli studenti ha fornito la risposta corretta alla domanda posta, mentre il 31.4% si è lasciato fuorviare dal "distrattore" (risposta A).

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M520Q02- Skateboard

	Risposta 1	*Risposta 2*	*Risposta 3*	***Risposta4***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**
Nord Ovest	27,7	13,9	4,3	**47,0**	0,2	5,4	1,4
Nord Est	24,9	15,5	7,3	**47,2**	0,2	4,2	0,6
Centro	26,5	20,9	6,0	**37,6**	0,0	6,8	2,2
Sud	39,1	19,2	5,8	**20,5**	0,5	12,4	2,3
Sud Isole	35,9	23,1	6,2	**20,7**	0,0	9,9	4,1
ITALIA	*31,4*	*18,6*	*5,8*	***33,7***	*0,2*	*8,1*	2,2
OCSE	*25,0*	*18,1*	*6,2*	***44,8***	*4,4*		*1,5*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Al Sud la percentuale di studenti che ha fornito la risposta corretta (20,5%) è nettamente inferiore a quello degli studenti che ha indicato come risposta corretta il distrattore (39.1%). Ciò testimonia la scarsa abitudine degli studenti a collegare le informazioni tra loro ed elaborare strategie che portino a conclusioni/generalizzazioni matematiche.

Domanda 3

Enrico può spendere 120 zed e vuole comprare lo skateboard più costoso che si può permettere. Quanto può permettersi di spendere Enrico per ciascuno dei 4 pezzi? Scrivi la tua risposta nella tabella qui sotto

Pezzo	**Importo (zed)**
Tavola	
Rotelle	
Blocchi	
Accessori	

Codici di risposta

Punteggio pieno

Codice 1: 65 zeds per una tavola, 14 per le rotelle, 16 per i blocchi e 20 per gli accessori.

Nessun punteggio

Codice 0: Altre risposte

Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

554 (Livello 4 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica). Anche in questo caso lo studente si trova di fronte ad una "situazione concreta complessa" che richiede la capacità di confrontare tra loro combinazioni diverse tra le quali individuare la più conveniente. Deve mostrare, pertanto, flessibilità di ragionamento, con un certo grado di profondità di comprensione.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare.
Abilità matematiche*:* Analogamente al quesito precedente non sono richieste particolari abilità matematiche, se gli studenti scelgono la strada più immediata, ovvero individuare tutte le possibili combinazioni di prezzi.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al solo processo di "formulazione in forma matematica", in quanto è solo richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti nella tabella
- **Matematizzazione:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione", nell'identificazione delle variabili e nella comprensione del contesto. Infatti è necessario costruire una modellizzazione che consenta di ottenere i vari costi totali possibili.
- **Rappresentazione:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione". Occorre, infatti, mettere in relazione tra loro tipologie di pezzi e relativi costi, al fine di individuare lo skateboard con migliori prestazioni il cui costo complessivo rientri nei limiti del budget previsto.
- **Elaborazione di strategie:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione". Anche in questo caso lo studente deve elaborare la giusta strategia che gli consenta di individuare tutte le possibili combinazioni di prezzi al fine di indicare qual è la più conveniente, in base al budget disponibile.
- **Ragionamento ed argomentazione:** relativa al processo di "utilizzazione". Non è richiesto, in effetti, di fornire una giustificazione alla risposta data (argomentazione), ma sicuramente è necessario attivare processi mentali, basati sulla logica, che permettano di trarre una conclusione inerente il miglior prezzo possibile.

Analisi item

La domanda, posta in maniera chiara, è del tipo "aperta a risposta univoca", in quanto un solo modo di compilare la tabella risulta corretto. Le difficoltà principali per lo studente sono relative ai processi di elaborazione della strategia e ragionamento e sono simili a quelle relative alla domanda 1.2. Infatti, anche in questo caso, la strada più convenzionale sarebbe provare tutte le possibili combinazioni di prezzi, mentre invece la più "conveniente" consiste nell'individuare (essendo 137 zed il prezzo massimo possibile) in quale maniera si possa determinare un risparmio ragionevolmente superiore ai 17 zed (cifra che rappresenta la differenza tra il prezzo massimo e l'importo di cui Enrico dispone).

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003
M520Q03T- Skateboard

	Risposta 0	*Risposta 1*	*Risposta 2*	*Risposta 3*	***Risposta4***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**
Nord Ovest	3,6	5,6	13,8	16,1	**53,5**	0,0	5,4	2,0
Nord Est	5,1	4,2	12,7	16,5	**56,8**	0,0	4,1	0,6
Centro	4,6	9,8	11,8	19,1	**46,6**	0,0	5,8	2,2
Sud	9,1	8,3	17,0	19,9	**32,5**	1,1	9,2	2,8
Sud Isole	12,4	7,3	18,6	15,7	**30,2**	0,4	11,0	4,5
ITALIA	*7,1*	*7,2*	*15,0*	*17,5*	***43,1***	*0,3*	*7,3*	*2,5*
OCSE	*5,0*	*5,5*	*17,0*	*16,4*	***48,9***	*5,4*		*1,7*

* La colonna in grassetto corrisponde a 4/4 risposte corrette.

La percentuale di risposte corrette è lievemente superiore rispetto a quella registrata per la domanda 2 (in linea con il minor punteggio, a parità di livello di difficoltà associato all'item)

2. TASSO DI CAMBIO

Stimolo:

Mei-Ling, una studentessa di Singapore, si prepara ad andare in Sudafrica per 3 mesi nell'ambito di un piano di scambi tra studenti. Deve cambiare alcuni dollari di Singapore (SGD) in rand sudafricani (ZAR)

Descrizione e contesto:

Il contesto della prova è, anche in questo caso, **personale**, in quanto è inerente il problema pratico del "cambio di valute" che si trova ad affrontare un individuo in procinto di affrontare un viaggio in un Paese straniero. Lo stimolo è posto in maniera chiara e senza ambiguità.

Domanda 1

Mei-Ling ha saputo che il tasso di cambio tra il dollaro di Singapore e il rand sudafricano è:
1 SGD = 4,2 ZAR
Mei-Ling ha cambiato 3.000 dollari di Singapore in rand sudafricani a questo tasso di cambio.
Quanti rand sudafricani ha ricevuto Mei-Ling?
Risposta: .....

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: 12.600 ZAR (l'unità di misura non è richiesta).
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

406 (Livello 1 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica). L'informazione relativa al tasso di cambio è esplicita e l'azione richiesta deriva direttamente dallo stimolo.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare. Proporzioni.
Abilità matematiche*:* Non sono richieste particolari abilità matematiche, è necessario solo impostare correttamente la relazione tra dollari di Singapore e rand sudafricani.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al solo processo di "formulazione in forma matematica", in quanto è semplicemente richiesto di prendere nota del tasso di cambio
- **Matematizzazione:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione", essendo necessario identificare le variabili e organizzare il processo matematico di risoluzione
- **Elaborazione di strategie:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione" necessaria per esprimere la corretta proporzionalità tra le due valute.

Analisi item

La domanda, del tipo "aperta a risposta univoca" e lo stimolo sono posti in modo chiaro ed esplicito. Non sono richieste capacità matematiche diverse dalla semplice comprensione del contesto e la successiva organizzazione del processo di risoluzione. Ciò nonostante, in Italia, il numero di risposte esatte è stato pari soltanto al 70%, cosa questa che testimonia come alcuni studenti non possiedano neanche le più elementari competenze matematiche.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M413Q01- Tasso di cambio

	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**
Nord Ovest	11,6	**82,3**	0,0	5,3	0,7
Nord Est	11,3	**82,4**	0,0	5,1	1,3
Centro	17,9	**72,2**	0,0	8,4	1,4
Sud	17,1	**62,7**	0,0	17,1	3,1
Sud Isole	24,0	**55,1**	0,0	17,7	3,2
ITALIA	*16,7*	***70,0***	*0,0*	*11,3*	*2,0*
OCSE	*13,6*	***78,7***	*0,0*	*6,5*	*1,2*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Dalla tabella si evince, inoltre, che al Sud si registra non solo una percentuale di risposte esatte inferiore alla media italiana, ma soprattutto una percentuale di risposte omesse decisamente elevata (17.7%). In pratica circa il 20% degli studenti del Sud non è in grado di impostare correttamente una semplice proporzione.

Domanda 2

Quando Mei-Ling torna a Singapore dopo 3 mesi, le restano 3.900 ZAR. Li cambia di nuovo in dollari di Singapore, notando che il nuovo tasso di cambio è:
1 SGD = 4,0 ZAR
Quanti dollari di Singapore riceve Mei-Ling?
Risposta: .....

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: 975 SGD (l'unità di misura non è richiesta).
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

439 (Livello 2 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica). Il livello è lievemente più elevato rispetto alla precedente domanda in quanto risulta necessario "invertire" l'algoritmo utilizzato in precedenza

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare. Proporzioni.
Abilità matematiche*:* Non sono richieste particolari abilità matematiche, è necessario solo impostare correttamente la nuova relazione tra dollari di Singapore e rand sudafricani.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al solo processo di "formulazione in forma matematica", in quanto è semplicemente richiesto di prendere nota del nuovo tasso di cambio

- **Matematizzazione:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione", essendo necessario identificare le variabili e organizzare il processo matematico di risoluzione
- **Elaborazione di strategie:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione" necessaria per esprimere la corretta proporzionalità tra le due valute.

Analisi item

La domanda, del tipo "aperta a risposta univoca" è analoga alla precedente. Il livello maggiore di difficoltà (che si evince anche dall'analisi delle percentuali di risposte degli studenti) è legato sostanzialmente al fatto che, in questo caso, lo studente deve effettuare la "conversione inversa" rispetto al caso precedente.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M413Q02 -Tasso di cambio

	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**
Nord Ovest	15,7	**75,0**	0,0	8,4	0,9
Nord Est	12,5	**79,0**	0,0	6,7	1,8
Centro	16,8	**69,1**	0,0	12,4	1,7
Sud	22,6	**53,1**	0,0	20,0	4,4
Sud Isole	26,3	**47,6**	0,0	22,2	3,9
ITALIA	*19,3*	***63,5***	*0,0*	*14,6*	*2,7*
OCSE	*17,0*	***72,6***	*0,0*	*8,7*	*1,7*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Degno di nota è il divario (circa il 20%) tra la media OCSE di risposte corrette e la percentuale raggiunta dagli studenti del Sud Italia.

Domanda 3

Durante questi 3 mesi il tasso di cambio è passato da 4,2 a 4,0 ZAR per 1 SGD. Per Mei-Ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR nel momento in cui cambia i suoi rand sudafricani in dollari di Singapore? Spiega brevemente la tua risposta.

.....

.....

.....

Codici di risposta

Punteggio pieno

Codice 11: Sì, seguito da una spiegazione appropriata.

• Sì, grazie al tasso di cambio più basso (per 1 SGD) Mei-Ling riceverà più dollari di Singapore per i suoi rand sudafricani.

• Sì, 4,2 ZAR per un dollaro le avrebbero fatto ottenere 929 ZAR. (Da notare: lo studente ha scritto ZAR invece di SGD, ma ha eseguito correttamente i calcoli e il confronto per cui questo errore può essere ignorato.)

• Sì, perché lei ha ricevuto 4.2 ZAR per 1 SGD ed ora deve pagare solo 4.0 ZAR per ricevere 1 SGD.

• Sì, perché ogni SGD costa 0.2 ZAR di meno.

• Sì, perché quando si divide per 4.2 il risultato è minore rispetto a quando si divide per 4.

• Sì, è più vantaggioso per lei perché se non si fosse abbassato, lei avrebbe avuto 50$ in meno.

Nessun punteggio
Codice 01: Sì, senza alcuna spiegazione o con una spiegazione non corretta.
• Sì, è meglio un tasso di cambio più basso.
• Sì, è più vantaggioso per Mei-Ling perché se lo ZAR si abbassa di valore lei avrà più denaro da cambiare in SGD.
• Sì, è più vantaggioso per Mei-Ling.
Codice 02: Altre risposte
Codice 99: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

586 (Livello 4 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica). Il questo caso allo studente è richiesto di collegare tra loro due situazioni differenti mostrando di aver compreso il problema in profondità. Deve, inoltre, essere in grado di argomentare la conclusione a cui è arrivato.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare. Proporzioni.
Abilità matematiche*:* Non sono richieste particolari abilità matematiche. E' richiesto, invece, di confrontare due situazioni e valutare quale delle due sia più vantaggiosa.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa a tutti e tre i processi matematici (formulazione, utilizzazione, interpretazione), in quanto bisogna comprendere il testo, articolare una soluzione, illustrarla e motivare la risposta.
- **Matematizzazione:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione", essendo necessario identificare le variabili e organizzare il processo matematico di risoluzione
- **Elaborazione di strategie:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione" necessaria per esprimere la corretta proporzionalità tra le due valute.
- **Ragionamento ed argomentazione:** relativa ai processi di "utilizzazione" ed "interpretazione" in quanto è richiesto di spiegare e giustificare sia il procedimento usato che la soluzione indicata.

Analisi item

La domanda è del tipo "aperta a risposta articolata". Allo studente è richiesto di fornire non solo la risposta corretta, ma anche di spiegare e giustificare il procedimento usato. E' proprio la capacità "ragionamento ed argomentazione" che gli studenti acquisiscono con maggiore difficoltà. Infatti, dall'analisi delle risposte fornite, si evince che solo il 33.2% degli studenti italiani è stato in grado di conseguire il punteggio pieno, mentre la maggior parte (35.9%) ha compreso, in modo intuitivo, quale fosse la risposta corretta ma non è stata capace di fornire una spiegazione appropriata. Al Sud il divario tra risposta corretta oppure errata/senza spiegazioni è più elevato rispetto alla media nazionale. La maggior parte degli studenti del Sud (35%) ha preferito non rispondere.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M413Q03T - Tasso di cambio

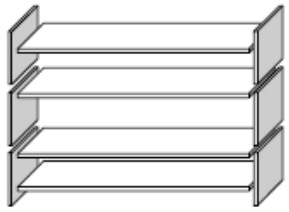
	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**
Nord Ovest	35,8	**45,3**	0,0	17,8	1,0
Nord Est	39,0	**44,3**	0,0	14,8	1,8
Centro	35,4	**37,8**	0,0	24,4	2,4
Sud	33,4	**27,0**	0,0	35,0	4,7
Sud Isole	37,2	**16,1**	0,0	42,8	3,9
ITALIA	*35,9*	***33,2***	*0,0*	*27,9*	*2,9*
OCSE	*41,5*	***39,6***	*0,0*	*17,1*	*1,8*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

3. LIBRERIA

Stimolo:

Per costruire una libreria, un falegname ha bisogno del seguente materiale:
4 assi di legno lunghe
6 assi di legno corte
12 ferri ad angolo piccoli
2 ferri ad angolo grandi
14 viti



Descrizione e contesto:

Il contesto della prova è **occupazionale**, in quanto riguarda una situazione di vita lavorativa: un falegname che deve decidere quante librerie è in grado di costruire con il materiale a sua disposizione. Lo stimolo è posto in maniera chiara e lo schema della libreria rende più immediata la comprensione del numero di assi necessario per assemblare la libreria.

Domanda 1

Il falegname ha a disposizione 26 assi lunghe, 33 assi corte, 200 ferri ad angolo piccoli, 20 ferri ad angolo grandi e 510 viti.
Quante librerie complete può costruire il falegname?
Risposta: .....

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: 5
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

499 (Livello 3 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica). La procedura da seguire è chiara. Il livello di difficoltà associato a quest'item è legato essenzialmente alla capacità dello studente di individuare quale sia, tra i vari materiali

che servono per la costruzione della libreria, il minor quoziente (numero intero) tra il numero di pezzi disponibili ed il numero di pezzi necessari.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare.
Abilità matematiche*:* Il quesito richiede semplicemente di prendere nota del numero di pezzi necessari (in base ai diversi materiali) per assemblare una libreria e del numero di pezzi disponibili.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al solo processo di "formulazione in forma matematica", in quanto è semplicemente richiesto di prendere nota del materiale necessario per costruire una libreria completa
- **Matematizzazione:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione" in quanto è necessario identificare le variabili ed organizzare il processo matematico di risoluzione
- **Rappresentazione:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione". Occorre, infatti, mettere in relazione tra loro il numero di pezzi necessari ed il numero di pezzi disponibili per ciascuno dei materiali presenti nello stimolo
- **Elaborazione di strategie:** relativa al processo di "formulazione" in quanto è necessario elaborare una strategia per inquadrare il problema

Analisi item

La domanda, del tipo "aperta a risposta univoca". Le maggiori difficoltà che lo studente può incontrare sono relative al processo di decodifica-interpretazione del testo e nel comprendere che, per costruire una libreria completa è necessario possedere l'intero set di pezzi. Nel momento in cui lo studente ha compreso il contesto, non sono richieste particolari procedure matematiche.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M484Q01T - Libreria

	Risposta 0	***Risposta1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**
Nord Ovest	23,8	**63,9**	1,3	9,5	1,4
Nord Est	20,7	**66,1**	1,7	10,6	0,8
Centro	28,5	**54,3**	1,6	12,4	3,2
Sud	27,6	**50,6**	2,4	13,9	5,4
Sud Isole	28,9	**44,6**	3,2	19,1	4,2
ITALIA	*26,2*	***55,3***	*2,1*	*13,3*	*3,2*
OCSE	*28,6*	***59,8***	*0,0*	*9,8*	*1,8*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Circa la metà degli studenti del Sud è stata in grado di rispondere correttamente a questo item. Data la scarsa dimestichezza degli studenti ad elaborare argomentazioni a supporto della soluzione indicata, probabilmente si sarebbe registrata una percentuale minore di risposte corrette se fosse stato richiesto di motivare la risposta data.

4. SCELTE

Stimolo:

In una pizzeria, puoi prendere la pizza normale con due ingredienti base: formaggio e pomodoro. Puoi chiedere anche una pizza a tua scelta con l'aggiunta di **altri** ingredienti scegliendo tra quattro diversi ingredienti: olive, prosciutto, funghi e salame.

Descrizione e contesto:

Il contesto della prova è **personale**, in quanto riguarda una situazione pratica: di fronte a varie alternative, quante possibili scelte un individuo ha a sua disposizione.

Domanda 1

Riccardo vuole ordinare una pizza con **altri** due ingredienti diversi.
Tra quante diverse combinazioni può scegliere Riccardo?
Risposta: .....combinazioni

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: 6
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

559 (Livello 4 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica). Lo studente deve mostrare un certo grado di profondità di comprensione e flessibilità di ragionamento. Non è richiesto di argomentare la risposta fornita, ma solo di determinare il numero massimo di combinazioni diverse di due ingredienti scelti tra quattro possibili.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare**.** Cenni di calcolo combinatorio (non necessario).
Abilità matematiche*:* Non sono richieste abilità particolari, se non la precisione nel determinare tutte le possibili combinazioni di ingredienti

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al solo processo di "formulazione in forma matematica", in quanto è semplicemente richiesto di prendere nota del tasso di cambio
- **Matematizzazione:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione" nell'identificare le variabili e organizzare il processo matematico di risoluzione
- **Elaborazione di strategie:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione". Bisogna essere, infatti, in grado di elaborare una strategia per calcolare in quanti modi diversi si possono "combinare" tra loro due ingredienti, avendone quattro a disposizione**.**

Analisi item

La domanda è del tipo "aperta a risposta univoca". Lo studente deve individuare il numero di combinazioni di due elementi estratti da un insieme di quattro. Dato il numero ristretto di scelte possibili, non è necessario far ricorso al calcolo combinatorio (di cui uno studente quindicenne non è ancora a conoscenza), ma è sufficiente "contare" il numero possibile di coppie. Solo il 44,4% di studenti italiani è stato in grado di fornire la risposta corretta (contro il 42,4% che ha intuito il senso della domanda, ma ha "contato" in modo errato il numero di coppie).

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA - PISA 2003

M510Q01T - Scelte

	Risposta 0	***Risposta1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**
Nord Ovest	36,4	**55,3**	1,7	5,6	1,1
Nord Est	39,4	**54,2**	3,0	2,9	0,6
Centro	46,0	**42,4**	5,2	5,6	0,8
Sud	47,0	**36,7**	5,7	7,6	2,9
Sud Isole	42,2	**36,2**	7,9	11,8	2,0
ITALIA	*42,4*	***44,4***	*4,8*	*6,9*	*1,6*
OCSE	*45,6*	***48,2***	*5,1*		*1,1*

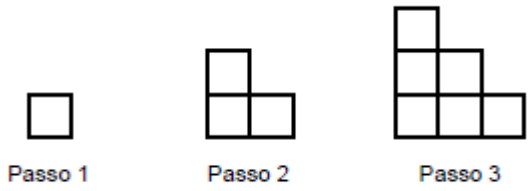
* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Al Sud si registra una percentuale maggiore di studenti che hanno fornito risposte errate (47%) rispetto a quella degli studenti che hanno risposto correttamente (36.7%). Ciò evidenzia come, di fronte a quesiti di livello 4, leggermente superiore alla media, gli studenti del Sud mostrino grosse difficoltà ad elaborare strategie di risoluzione, non essendo in grado di lavorare in situazioni concrete che comportino vincoli o richiedano deduzioni.

5. MOTIVI A SCALETTA

Stimolo:

Roberto costruisce dei motivi a scaletta usando dei quadrati. Procede per passi successivi:



Come puoi vedere, usa un quadrato per il Passo 1, tre quadrati per il Passo 2 e sei quadrati per il Passo 3.

Descrizione e contesto:

Il contesto della prova è **scientifico**, in quanto riguarda il mondo della matematica in sé. Lo studente deve essere in grado, a partire dai motivi a scaletta forniti nello stimolo in tre passi consecutivi, di estrapolare il motivo relativo al passo successivo.

Domanda 1

Quanti quadrati dovrà usare per il quarto passo?
Risposta: .....quadrati

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: 10
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

484 (Livello 4 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica). Lo studente si trova di fronte ad una situazione concreta di fronte alla quale deve mostrare di possedere competenze ben sviluppate e flessibilità di ragionamento. il livello di competenza associato a quest'item non è legato tanto alla capacità dello studente di disegnare pedissequamente il quarto passo del motivo a scaletta, quanto alla sua abilità di costruire un modello matematico valido per qualsiasi numero di passi.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare. Geometria euclidea
Abilità matematiche*:* Il quesito richiede un attento esame dei motivi forniti nello stimolo e la capacità di procedere "per passi successivi"

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al solo processo di "formulazione in forma matematica", in quanto è semplicemente richiesto di interpretare l'immagine al fine di creare un modello mentale del problema
- **Rappresentazione:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione". Occorre, infatti, mettere in relazione tra loro il numero di quadrati ed il numero di passi.
- **Elaborazione di strategie:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione". Deve essere, infatti, in grado di elaborare una strategia per calcolare il numero di quadrati da utilizzare in base al numero di passi.
- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni:** relativa ai processi matematici "formulazione" ed "utilizzazione". Lo studente deve essere in grado, infatti, di utilizzare e definire un algoritmo adeguato allo scopo.

Analisi item

La domanda è del tipo "aperta a risposta univoca". Lo studente deve individuare il numero quadrati necessari per il quarto passo. La difficoltà principale è legata essenzialmente alla capacità dello studente di determinare la relazione tra "quadrati e passi" al fine di elaborare un algoritmo valido, utilizzando possibilmente un linguaggio simbolico. Il modo più immediato consiste, ovviamente, nel disegnare il motivo a scaletta relativo al quarto passo e contare il numero dei quadrati. Più interessante ed utile (al fine di fornire un modello teorico valido per un numero qualunque di passi) sarebbe utilizzare due variabili ("*x*" per il numero di quadrati ed "*n*" per il numero di passi) e comprendere come la relazione tra esse sia: $x = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M806Q01 - Motivi a scaletta

	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	**%**	**%**	**%**	**%**	**%**
Nord Ovest	38,8	**56,5**	0,1	0,8	3,8
Nord Est	35,3	**60,7**	0,1	0,3	3,6
Centro	43,5	**49,1**	0,1	2,8	4,6
Sud	41,0	**46,7**	1,1	1,6	9,6
Sud Isole	50,5	**38,8**	0,0	2,5	8,3
ITALIA	*42,1*	***49,8***	*0,3*	*1,6*	*6,2*
OCSE	*31,1*	***63,7***	*1,4*		*3,8*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

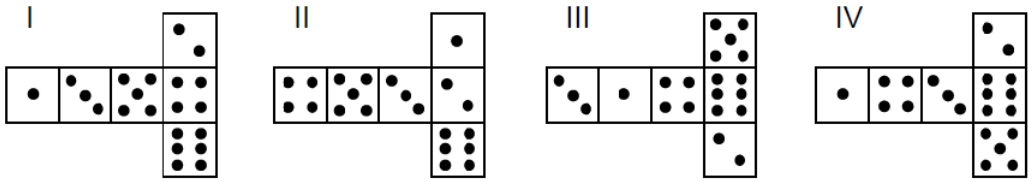
Anche in questo caso è rilevante il divario tra media OCSE e Italia del Sud (17 punti percentuali in meno di risposte corrette), nonché l'elevato numero di risposte errate (41%)

IDEA CHIAVE: Spazio e forma

1. DADI DA GIOCO

Domanda 2

Il disegno a destra rappresenta due dadi.
I dadi sono cubi con le facce numerate secondo la seguente regola:
La somma dei punti su due facce opposte deve essere sempre uguale a sette.
Puoi costruire un dado da gioco tagliando, piegando e incollando un pezzo di cartone.
Puoi realizzare questo in molti modi. La figura qui sotto mostra quattro cartoncini che puoi utilizzare per costruire un dado. Quale/i delle seguenti forme puoi ripiegare in modo da formare un dado che obbedisca alla regola per cui la somma delle facce opposte è 7? Per ciascuna forma, fai un cerchio intorno a «Sì» o «No» nella tabella che segue.



Forma	Obbedisce alla regola per cui la somma delle facce opposte è 7?
I	Sì / No
II	Sì / No
III	Sì / No
IV	Sì / No

Descrizione e contesto

Il contesto è quello **scientifico**, il quesito riguarda dei dadi da gioco particolari. Le facce di questi dadi sono numerate in modo che la somma dei punti presenti su facce opposte deve essere sempre uguale a sette. Partendo da questa osservazione, vengono rappresentati quattro sviluppi di quattro dadi, e si chiede allo studente di stabilire se essi rispettano o meno la regola.

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: Nell'ordine: No, Sì, Sì, No
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

503 (Livello 3 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve saper selezionare semplici strategie per risolvere problemi. A partire dalle informazioni date l'alunno deve costruire un ragionamento che lo porti alla soluzione.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare. Geometria solida.
Abilità matematiche*:* Il quesito non prevede particolari abilità, se non ragionamento e deduzione.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto lo studente deve elaborare una strategia per inquadrare il problema, ed al processo "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", poiché contemporaneamente lo studente deve attivare dei meccanismi di controllo efficaci.

Analisi item

La domanda è del tipo "a risposta aperta univoca". Lo studente deve cerchiare la risposta che ritiene corretta. Solo il 54,5% degli studenti italiani identifica correttamente quali dadi verificano la regola descritta, scostandosi dalla media OCSE di soli 6 punti percentuali. La maggiore difficoltà sarà stata riscontrata nell'identificare le facce opposte negli sviluppi dei dadi.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M555Q02- Dadi da gioco

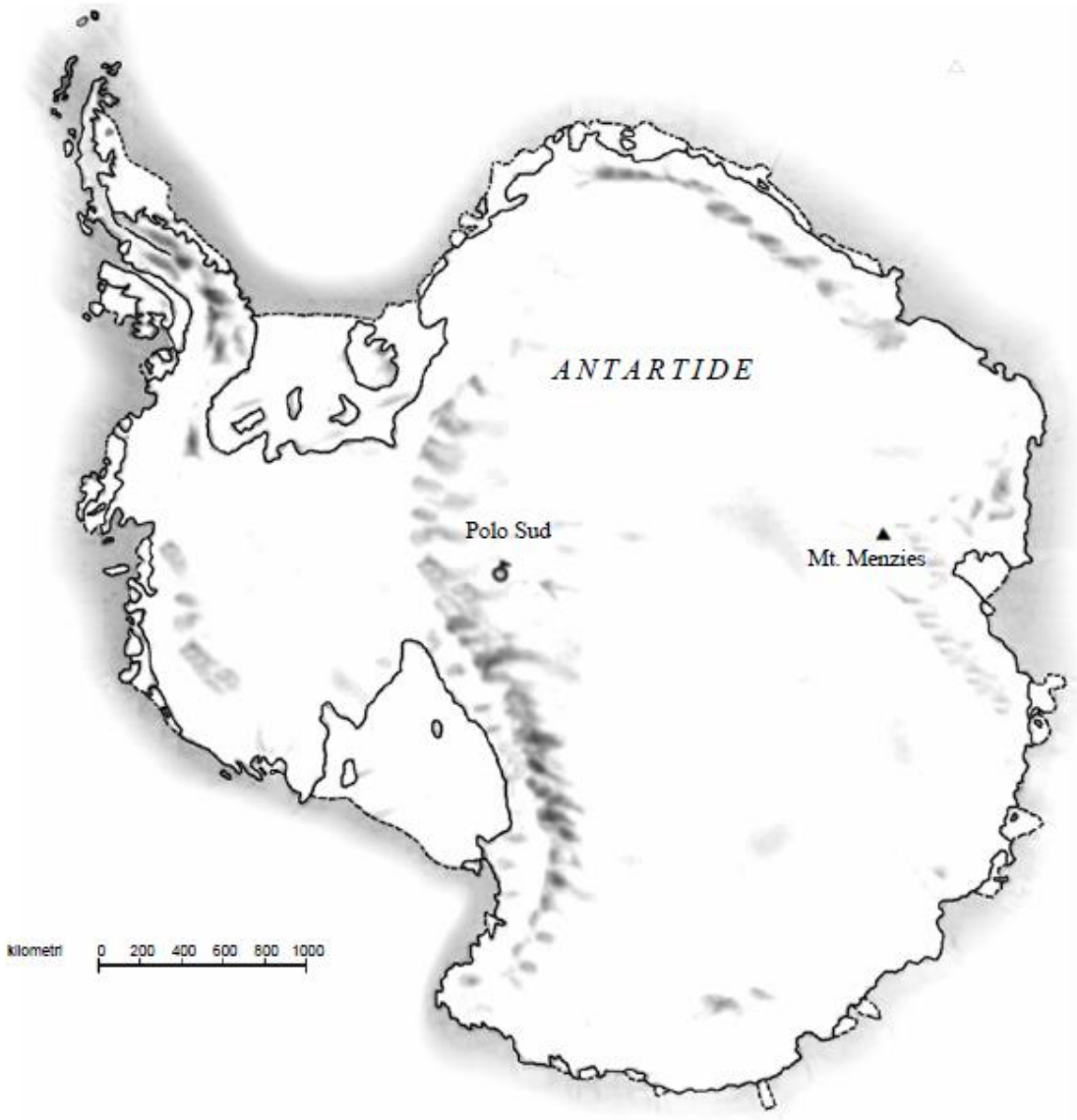
	Risposta 0	*Risposta 1*	*Risposta 2*	*Risposta 3*	***Risposta 4***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	1,5	6,3	6,2	15,1	**65,4**	0,0	2,0	3,5
Nord Est	1,3	4,3	6,6	20,0	**63,6**	0,0	1,3	3,1
Centro	3,0	7,6	7,1	20,6	**52,8**	0,0	4,0	4,8
Sud	3,7	9,6	10,0	14,1	**49,7**	0,0	6,2	6,7
Sud Isole	5,3	11,5	9,6	19,1	**42,8**	0,0	4,1	7,7
ITALIA	*3,1*	*8,1*	*8,0*	*17,5*	***54,5***	*0,0*	*3,7*	*5,3*
OCSE	*2,6*	*6,9*	*8,6*	*15,4*	***60,7***	*2,2*		*3,5*

* La colonna in grassetto corrisponde a 4/4 risposte corrette.

2. AREA DI UN CONTINENTE

Stimolo

La figura illustra una carta geografica dell'Antartide.



Descrizione e contesto

Il contesto potrebbe essere quello **scientifico**, l'item riporta una cartina geografica che rappresenta l'Antartide.

Domanda 2

Stima l'area dell'Antartide utilizzando la scala della carta geografica. Mostra il tuo lavoro e spiega come hai fatto la tua stima. (Puoi disegnare sulla carta se questo può aiutarti a fare la tua stima).
Risposta: …….

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 21: Stima effettuata disegnando un quadrato o un rettangolo – risposta compresa tra 12.000.000 km^2 e 18.000.000 km^2
Codice 22: Stima effettuata disegnando un cerchio - risposta compresa tra 12.000.000 km^2 e 18.000.000 km^2
Codice 23: Stima effettuata addizionando l'area di più figure geometriche regolari - risposta compresa tra 12.000.000 km^2 e 18.000.000 km^2
Codice 24: Stima effettuata correttamente con un altro metodo - risposta compresa tra 12.000.000 km^2 e 18.000.000 km^2
Codice 25: Risposta corretta (tra 12.000.000 km^2 e 18.000.000 km^2) ma non viene illustrato il procedimento seguito
Punteggio parziale
Codice 11: Stima l'area disegnando un quadrato o un rettangolo – metodo corretto, ma risposta incompleta o sbagliata.
Codice 12: Stima l'area disegnando un cerchio - metodo corretto, ma risposta incompleta o sbagliata.
Codice 13: Stima l'area addizionando l'area di più figure geometriche regolari - metodo corretto, ma risposta incompleta o sbagliata.
Codice 14: Stima l'area utilizzando un altro metodo corretto – ma la risposta è incompleta o sbagliata
Nessun punteggio
Codice 01: Calcola il perimetro al posto dell'area
Codice 02: Altre risposte
Codice 99: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

Punteggio pieno 712 (Livello 6 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve saper concettualizzare e utilizzare informazioni sulla base delle proprie ricerche e della modellizzazione di situazioni problematiche complesse. Inoltre, deve saper fare riflessioni e ragionamenti matematici difficili ed elaborare strategie di attacco in presenza di situazioni mai incontrate prima.
Punteggio parziale 629 (Livello 5 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve saper utilizzare modelli per situazioni complesse, identificando i vincoli. Inoltre, deve saper valutare strategie appropriate alla soluzione di problemi complessi.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare. Rappresentazioni grafiche.
Abilità matematiche*:* Capacità di individuare la scala di misura utilizzata per la rappresentazione e trovare una strategia al fine di calcolare l'area del continente disegnato.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti e relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", poiché lo studente deve articolare una soluzione illustrando il lavoro utilizzato per raggiungerla.
- **Rappresentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto lo studente deve dare un senso alla rappresentazione grafica fornita.
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** relativa al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici", poiché bisogna elaborare una strategia atta a valutare e convalidare una soluzione matematica.

Analisi item

La domanda è del tipo "a risposta aperta articolata". Lo studente deve stimare l'area del continente utilizzando la scala della carta geografica e successivamente deve illustrare il procedimento che gli ha permesso di giungere al risultato. In Italia gli studenti hanno riscontrato enormi difficoltà nel rispondere a questo quesito, infatti solo il 3,9% è riuscito a fornire una risposta corretta. Anche gli studenti degli altri paesi hanno avuto dei problemi nel rispondere correttamente a questa domanda, ciò nonostante quasi il 10% di essi è giunto alla soluzione corretta. Più del 73% degli alunni italiani non fornisce alcuna risposta. Questo sta ad indicare, probabilmente, che essi non avessero alcuna idea su come risolvere il quesito.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA - PISA 2000

M148Q02T - Area di un continente

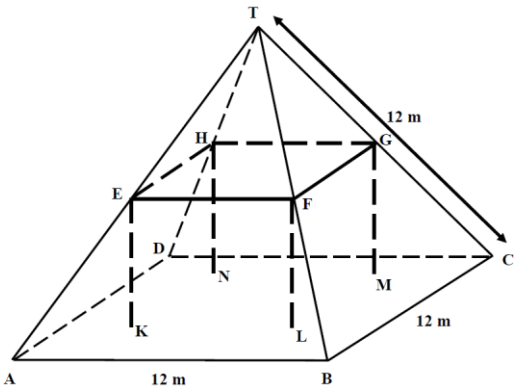
	Risposta 0	*Risposta 1*	***Risposta2***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	10,3	11,7	**5,1**	0,0	71,0	1,9
Nord Est	11,5	11,7	**8,6**	0,0	64,5	3,7
Centro	7,6	5,2	**3,4**	0,0	77,0	6,7
Sud	6,8	5,5	**2,1**	0,0	77,1	8,6
Sud Isole	9,5	2,8	**1,6**	0,0	74,6	11,4
ITALIA	*9,0*	*7,4*	***3,9***	*0,0*	*73,3*	*6,4*
OCSE	*19,7*	*19,1*	***9,4***	*0,0*	*48,2*	*3,7*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.
** La risposta 1 è parzialmente corretta.

3. FATTORIE

Stimolo

In questa pagina è riportata la fotografia di una fattoria con il tetto a forma di piramide. Di seguito si trova un modello matematico del **tetto** della fattoria realizzato da uno studente, con alcune misure.



Il pavimento della soffitta, ABCD nel modello, è un quadrato. Le travi che sostengono il tetto sono gli spigoli di un blocco (prisma rettangolare) EFGHKLMN. E è il punto medio di AT, F è il punto medio di BT, G è il punto medio di CT e H è il punto medio di DT. Tutti gli spigoli della piramide nel modello sono lunghi 12 m.

Descrizione e contesto

Il contesto è quello **scientifico**, infatti l'item riguarda le misure di un tetto a forma di piramide di una fattoria. Viene mostrata sia una foto del tetto in questione che un suo modello matematico. Successivamente vengono fornite alcune informazioni relative al pavimento della soffitta e alle travi che sostengono il tetto.

Domanda 1

Calcola l'area del pavimento della soffitta ABCD.
Area del pavimento della soffitta ABCD = _____ m^2

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: 144
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

492 (Livello 3 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve essere in grado di interpretare e utilizzare le rappresentazioni per costruire un ragionamento che lo porti alla soluzione del problema.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare. Geometria piana.
Abilità matematiche*:* Non è richiesta alcuna abilità particolare.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.
- **Rappresentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto lo studente deve cogliere le informazioni rappresentate nel disegno e utilizzarle per giungere alla soluzione del problema.

Analisi item

La domanda è del tipo "a risposta aperta univoca". Lo studente deve calcolare l'area del pavimento del soffitto. Per trovare la soluzione deve cogliere le informazioni insite nello stimolo, e cioè che il pavimento è un quadrato e che ogni lato del quadrato misura 12 m come mostrato nel disegno. Compreso questo, lo studente dovrà solo applicare la formula che permette di calcolare l'area di un quadrato. Risolvere questo problema è risultato abbastanza semplice, infatti più del 58% degli alunni italiani vi sono riusciti. Anche gli studenti del meridione non hanno riscontrato grandi difficoltà, il 54% di essi ha risposto correttamente.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2000
M037Q01T - Fattorie

	Risposta 0	***Risposta1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	17,6	**62,7**	0,0	19,4	0,3
Nord Est	13,3	**70,1**	0,0	15,1	1,5
Centro	20,0	**55,0**	0,0	24,1	0,9
Sud	18,5	**54,1**	0,0	23,6	3,9
Sud Isole	10,2	**52,2**	0,0	27,6	10,0
ITALIA	*16,3*	***58,3***	*0,0*	*22,2*	*3,2*
OCSE	*27,2*	***60,4***	*0,0*	*10,8*	*1,6*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Domanda 2

Calcola la lunghezza di EF, uno degli spigoli orizzontali del blocco.
Lunghezza di EF = _____ m

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: 6
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

524 (Livello 3 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve essere in grado di interpretare e utilizzare le rappresentazioni per costruire un ragionamento che lo porti alla soluzione del problema.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare. Geometria solida.
Abilità matematiche*:* Capacità di interpretare le rappresentazioni.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.
- **Rappresentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto lo studente deve cogliere le informazioni rappresentate nel disegno e utilizzarle per giungere alla soluzione del problema.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto è richiesta la capacità di collegare le informazioni per giungere ad una soluzione matematica.

Analisi item

La domanda è del tipo "a risposta aperta univoca". Lo studente deve calcolare uno spigolo orizzontale del prisma rettangolare. Sebbene il quesito sia di livello 3, solo il 36% degli studenti italiani riesce a trovare la soluzione del problema. Invece, gli studenti appartenenti ai paesi dell'OCSE ottengono il 54% di risposte corrette. Il divario tra Italia

e paesi OCSE è molto grande, i docenti italiani dovrebbero interrogarsi sui metodi di insegnamento e sul perché i loro alunni abbiano riscontrato così tante difficoltà.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2000
M037Q02T - Fattorie

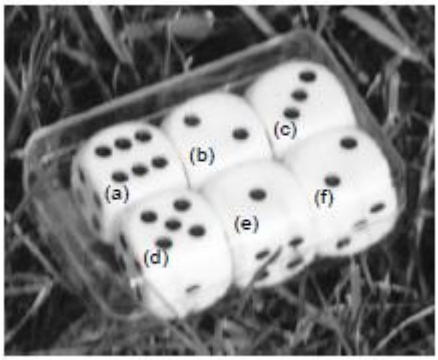
	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	13,5	**43,1**	0,0	43,1	0,3
Nord Est	11,4	**41,5**	0,0	45,6	1,5
Centro	5,4	**38,8**	0,0	54,5	1,3
Sud	10,3	**33,2**	0,0	51,5	5,0
Sud Isole	12,0	**23,1**	0,0	54,4	10,5
ITALIA	*10,7*	***36,0***	*0,0*	*49,6*	*3,7*
OCSE	*18,3*	***54,1***	*0,0*	*25,6*	*2,0*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

4. DADI

Stimolo:

In questa fotografia vi sono sei dadi da gioco, denominati con le lettere da (a) a (f).
Per tutti i dadi vale la seguente regola:
il numero totale di punti su due facce opposte è sempre sette.

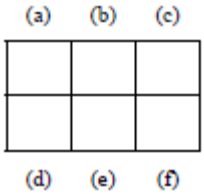


Descrizione e contesto:

Il contesto della prova è **scientifico** Rientra, infatti, nel contesto della matematica in sé (algebra e geometria), in quanto è semplicemente richiesto di individuare quale numero, sommato a quello presente su una data faccia del cubo, dia come risultato 7.

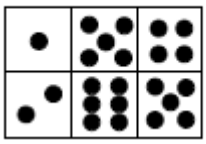
Domanda 1

Scrivi, in ogni casella, il numero di punti della faccia **opposta** di ciascun dado mostrato in fotografia.



Codici di risposta

Codice 1: Nella riga in alto: 1, 5, 4; in quella in basso: 2, 6, 5. Si accetta anche una risposta equivalente con la riproduzione delle facce del dado.



1	5	4
2	6	5

Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde
Nota: Per registrare la risposta, i numeri devono essere scritti per riga, cioè 1, 5, 4, 2, 6, 5. Se una casella contiene altro che non sia un numero tra 1 e 7, registrare come 0. Se una casella è vuota, registrare come 9.

Livello di difficoltà dell'item

478 (Livello 2 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica). A questo livello, infatti, allo studente è richiesto di fare soltanto deduzioni dirette utilizzando le informazioni presenti, in maniera molto chiara, nello stimolo. La procedura da utilizzare è estremamente elementare.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare. Geometria solida.
Abilità matematiche*:* Il quesito non richiede particolari abilità. E' necessario semplicemente costruire un modello mentale delle varie facce del dado, in modo da compilare in modo corretto la tabella

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al solo processo di "formulazione in forma matematica", in quanto è richiesta semplicemente la capacità di leggere ed interpretare le informazioni fornite nello stimolo
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione", dovendo essere in grado di individuare il numero presente sulla faccia opposta a quella mostrata nello stimolo.

Analisi item

La domanda è del tipo "aperta a risposta univoca", in quanto esiste una sola risposta corretta, anche se sono accettate due modalità diverse: compilazione della tabella mediante numeri oppure riproduzione delle facce del cubo. Dal punto di vista "numerico", le informazioni sono esplicite e l'azione deriva direttamente dallo stimolo, pertanto all'item si potrebbe associare anche il livello di competenza 1. Tuttavia il livello lievemente più elevato è attribuibile alla modalità di rappresentazione della risposta, che prevede le corretta compilazione della tabella e quindi la capacità dello studente di creare un "modello mentale" del cubo. L'idea chiave, infatti, è "spazio e forma" e non semplicemente "quantità". Nonostante la "semplicità" dell'item, solo il 49.3% degli studenti italiani ha risposto correttamente, mentre il 26.1% ha fornito risposte diverse.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2000

M145Q01 - Dadi

	Risposta 0	***Risposta1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	25,3	**56,9**	0,0	9,9	7,9
Nord Est	18,6	**65,4**	0,0	8,5	7,5
Centro	25,5	**50,5**	0,0	11,0	13,0
Sud	28,5	**41,2**	0,0	12,2	18,1
Sud Isole	29,8	**36,6**	0,0	10,7	22,8
ITALIA	*26,1*	***49,3***	*0,0*	*10,6*	*14,0*
OCSE	*29,7*	***53,2***	*0,0*	*7,8*	*9,3*

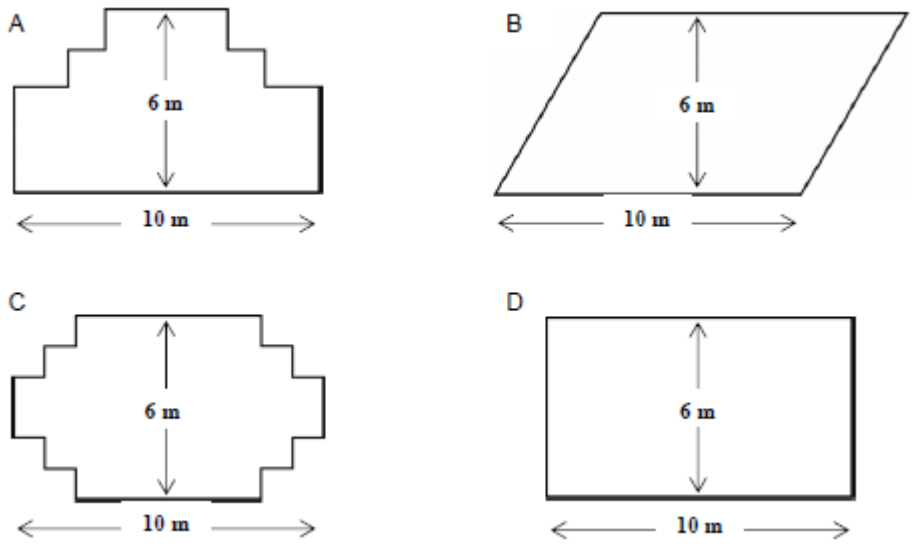
* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Al Sud la percentuale di risposte corrette è ancora inferiore (41.2%) con il 28.5% di risposte errate. Si rileva, inoltre, una percentuale piuttosto elevata di risposte omesse e non raggiunte. Probabilmente un discreto numero di alunni non ha fornito la risposta perché non è riuscito a leggere la parte finale del questionario.

5. CARPENTIERE

Stimolo:

Un carpentiere ha 32 metri di tavole di legno e vuole fare il recinto a un giardino. Per il recinto prende in considerazione i seguenti progetti.



Descrizione e contesto:

Il contesto della prova è **occupazionale**, in quanto riguarda un problema pratico relativo al mondo del lavoro: un carpentiere che deve realizzare un recinto intorno ad un giardino. La difficoltà principale consiste nell'identificare le lunghezze dei vari segmenti che costituiscono i lati delle figure che, in alcuni casi non sono esplicitamente indicate.

Domanda 1

Indica per ciascun progetto se è possibile realizzarlo con 32 metri di tavole.
Fai un cerchio intorno a «Sì» o «No».

Progetto per il recinto	Utilizzando questo progetto, si può realizzare il recinto con 32 metri di tavole?
Progetto A	Sì / No
Progetto B	Sì / No
Progetto C	Sì / No
Progetto D	Sì / No

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 2: Quattro risposte corrette, come segue:
Progetto A: Sì
Progetto B: No
Progetto C: Sì
Progetto D: Sì
Punteggio parziale
Codice 1: Tre risposte corrette
Nessun punteggio
Codice 0: Due o meno di due risposte corrette
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

687 (Livello 6 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica). Allo studente, infatti, è richiesto di modellizzare una situazione complessa, elaborando una strategia in un contesto non familiare. Deve mostrare una buona padronanza della geometria ed applicarla in un contesto reale.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Figure piane e loro proprietà
Abilità matematiche*:* Per rispondere in maniera corretta è necessario essere in grado di dedurre, dai dati forniti, le lunghezze dei segmenti incogniti.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al solo processo di "formulazione in forma matematica", in quanto richiesta solo la capacità di interpretare le immagini fornite nello stimolo
- **Rappresentazione:** relativa ai tre processi ("formulazione", "utilizzazione", "interpretazione) dovendo: creare una rappresentazione matematica delle informazioni, mettere in relazione il perimetro delle figure con la lunghezza delle tavole e collegare gli oggetti matematici al contesto: il vincolo imposto dalla lunghezza delle tavole disponibili
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione", dovendo essere in grado di individuare quali, tra i perimetri delle figure mostrate, sono inferiori a 32 m (lunghezza delle tavole disponibili)
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione di problemi:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione", dovendo essere capaci di dedurre le lunghezze di alcuni lati delle figure anche se esse non sono esplicitamente riportate nello stimolo.

Analisi item

La domanda è del tipo "a scelta multipla complessa", in quanto per ciascuna domanda bisogna selezionare una risposta tra due possibili. Le principali difficoltà si incontrano nella determinazione della lunghezza complessiva dei "lati verticali" delle singole figure. Risulta particolarmente difficoltosa la determinazione del perimetro della figura B, in quanto le informazioni sulle lunghezze dei lati non si evincono direttamente dallo stimolo. E' necessaria, pertanto, una buona capacità di ragionamento e una discreta padronanza della geometria euclidea di base per comprendere che i lati obliqui del parallelogramma della figura B sono più lunghi delle componenti verticali dei lati delle altre figure (il cui perimetro è esattamente pari a 32 m). Solo il 12.3% degli studenti italiani è riuscito a fornire quattro risposte corrette, mentre il 30% è riuscito ad individuarne tre.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA PISA 2003
M266Q01 -
Carpentiere

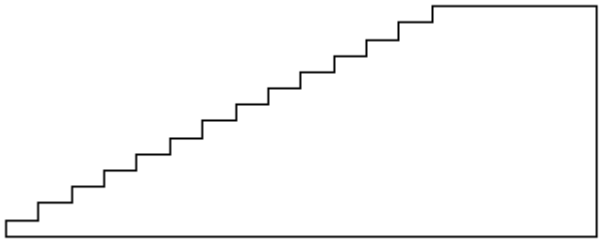
	Risposta 0	*Risposta 1*	*Risposta 2*	*Risposta 3*	***Risposta4***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	***%***	***%***	***%***	***%***	***%***	***%***	***%***	***%***
Nord Ovest	1,1	26,3	20,1	28,2	**17,9**	0,0	4,0	2,3
Nord Est	1,8	33,4	20,3	27,3	**12,9**	0,0	1,8	2,5
Centro	3,7	27,1	24,4	27,1	**10,5**	0,0	4,4	3,0
Sud	3,7	27,1	24,4	27,1	**10,5**	0,0	4,4	3,0
Sud Isole	3,7	27,1	24,4	27,1	**10,5**	0,0	4,4	3,0
ITALIA	*2,3*	*28,0*	*20,6*	*27,9*	***12,3***	*0,0*	*4,5*	*4,4*
OCSE	*1,5*	*25,2*	*18,9*	*30,0*	***19,5***	*0,0*	*2,4*	*2,4*

* La colonna in grassetto corrisponde a 4/4 risposte corrette.
** La risposta 3 è parzialmente corretta e corrisponde a 3/4 risposte corrette

6. SCALA

Stimolo:

La seguente figura mostra una scala che ha 14 gradini e un'altezza totale di 252 cm.



Descrizione e contesto:

Il contesto della prova è **scientifico**, in quanto riguarda l'applicazione della matematica ad una situazione pratica: la realizzazione di una scala di cui sono note le dimensioni e l'altezza di ciascun gradino.

Domanda 1

Qual è l'altezza di ciascuno dei 14 gradini?
Altezza: .....cm

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: 18
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

421 (Livello 2 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica). Le deduzioni richieste allo studente si basano semplicemente sull'osservazione della figura cui fa seguito un ragionamento diretto

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Geometria euclidea
Abilità matematiche*:* Il quesito è di semplice risoluzione, essendo solo necessario determinare l'altezza di ogni gradino conoscendo l'altezza complessiva della scala

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al solo processo di "formulazione in forma matematica", in quanto richiesta solo la capacità di interpretare l'immagine e "leggere i dati"
- **Rappresentazione:** relativa ai "formulazione" e "utilizzazione" in quanto è necessario mettere in relazione tra loro l'altezza della scala e il numero di gradini
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione di problemi:** relativa ai processi di "formulazione" ed "utilizzazione" in modo da determinare l'altezza dei gradini

Analisi item

La domanda è del tipo "aperta a risposta univoca". Sia lo stimolo che la domanda sono posti in maniera chiara, l'unica "difficoltà" consiste nel non lasciarsi fuorviare dall'informazione relativa alla profondità totale della scala, che è un dato inutile per la risoluzione del problema. Non sono necessari particolari ragionamenti o strategie, infatti il 77.6%, degli studenti italiani (percentuale leggermente superiore alla media OCSE) è stata in grado di rispondere correttamente.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003
M547Q01- Scala

	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	6,9	**83,1**	2,5	4,1	3,4
Nord Est	8,3	**83,1**	0,1	5,1	3,4
Centro	8,9	**77,1**	2,5	7,1	4,4
Sud	9,8	**73,4**	1,6	6,2	9,0
Sud Isole	8,8	**73,1**	4,0	6,7	7,3
ITALIA	*8,6*	***77,6***	*2,2*	*5,9*	*5,7*
OCSE	*11,2*	***75,5***	*10,0*		*3,3*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Al Sud la percentuale è inferiore alla circa 4 punti percentuali rispetto alla media degli studenti italiani probabilmente anche perché il 9% degli studenti non è arrivato alla domanda per questioni di tempo.

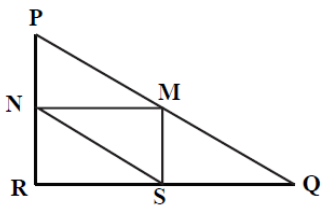
7. TRIANGOLI

Stimolo e domanda

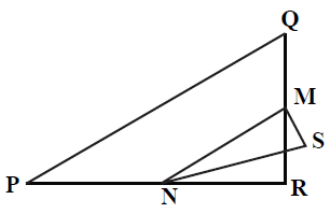
Tra le figure rappresentate qui sotto, cerchia l'unica che corrisponde alla descrizione seguente:

il triangolo PQR è un triangolo rettangolo con l'angolo retto in R. Il segmento RQ è minore del segmento PR. M è il punto medio del segmento PQ ed N è il punto medio del segmento QR. S è un punto all'interno del triangolo. Il segmento MN è maggiore del segmento MS.

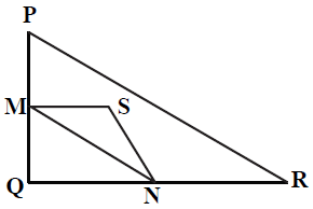
A



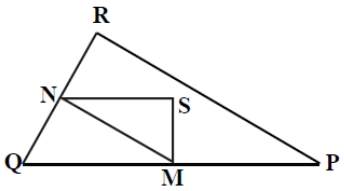
B



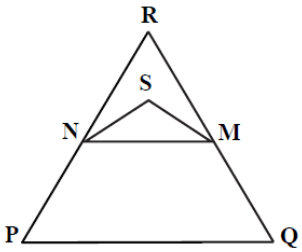
C



D



E



Descrizione e contesto:

Il contesto potrebbe essere quello **scientifico**. Infatti il quesito riguarda argomenti di geometria e, dunque, è strettamente legato al mondo matematico e fuori da ogni eventuale altro contesto.

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: D
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà

Il quesito è di livello 3 sulla scala complessiva di literacy in matematica. Si tratta, infatti, di un quesito abbastanza semplice. Per rispondere correttamente al quesito basta avere conoscenze di base di geometria piana: definizione di triangolo rettangolo e di punto medio di un segmento. C'è da osservare che lo studente potrebbe scartare la risposta corretta, ossia la figura D, perché in questa figura l'angolo retto è in alto e lo studente potrebbe non riconoscere il triangolo come rettangolo. Questa è l'unica vera difficoltà di questo quesito.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: concetti di base di geometria piana: triangoli, triangoli rettangoli, punto medio di un segmento.

Abilità matematiche*:* Lo studente deve leggere attentamente la descrizione della figura presente nella domanda e scartare, man mano, le figure non corrispondenti fino ad ottenere la risposta corretta.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**, relativamente al solo processo di "formulazione in forma matematica" (è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti);
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi,** relativamente al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica" (lo studente deve selezionare o elaborare un piano o una strategia per inquadrare il problema contestualizzato in forma matematica), al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve attivare meccanismi di controllo efficaci nel corso delle varie fasi del procedimento che porta alla soluzione) e al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve elaborare e mettere in atto una strategia finalizzata a interpretare, valutare e convalidare la soluzione a un problema contestualizzato).

Analisi item

Lo stimolo e la domanda non sono separate nel senso che la domanda viene posta subito senza un testo, una tabella o un grafico introduttivo. Si tratta di una domanda a risposta multipla e lo studente dovrà essere in grado di individuare quale delle figure geometriche presentate in seguito corrisponde ad una data descrizione. Viene, dunque, fornita la descrizione della figura da individuare e, infine, vengono presentate le varie figure. La descrizione fornita è la seguente:

"*il triangolo PQR è un triangolo rettangolo con l'angolo retto in R. Il segmento RQ è minore del segmento PR. M è il punto medio del segmento PQ ed N è il punto medio del segmento QR. S è un punto all'interno del triangolo. Il segmento MN è maggiore del segmento MS*". Lo studente potrebbe fare questo tipo di ragionamento o ragionamenti simili a questo:

- come conseguenza della prima frase ("*il triangolo PQR è un triangolo rettangolo con l'angolo retto in R"),* dovrebbe scartare la figura C e la figura E;
- come conseguenza della seconda frase ("*Il segmento RQ è minore del segmento PR"),* dovrebbe scartare la figura A;
- prendendo in considerazione la terza frase ("*M è il punto medio del segmento PQ ed N è il punto medio del segmento QR"*) può scartare la figura B.

A questo punto lo studente potrebbe già rispondere correttamente indicando la figura D e ciò viene confermato anche dalla quarta frase ("*S è un punto all'interno del triangolo"*) e dalla quinta ("*Il segmento MN è maggiore del segmento MS"*).

Va osservato che nella figura D (risposta corretta) il triangolo rettangolo ha l'angolo retto in alto e lo studente potrebbe non individuarlo come rettangolo.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA - PISA 2000

M161Q01 - Triangoli

	Risposta 1	*Risposta 2*	*Risposta 3*	***Risposta4***	*Risposta 5*	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	4,1	12,8	14,8	**61,9**	0,3	0,4	2,7	3,1
Nord Est	2,3	9,4	7,4	**68,1**	3,1	0,0	2,2	7,6
Centro	5,0	10,6	13,9	**51,4**	3,9	1,0	3,4	10,7
Sud	5,9	6,1	18,4	**49,8**	1,7	0,3	3,9	13,8
Sud Isole	8,6	8,2	10,8	**45,3**	1,8	1,2	6,2	17,8
ITALIA	*5,3*	*9,4*	*13,7*	***54,8***	*2,0*	*0,6*	*3,7*	*10,5*
OCSE	*6,9*	*8,4*	*17,1*	***55,3***	***2,1***	*1,3*	*3,5*	*5,4*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

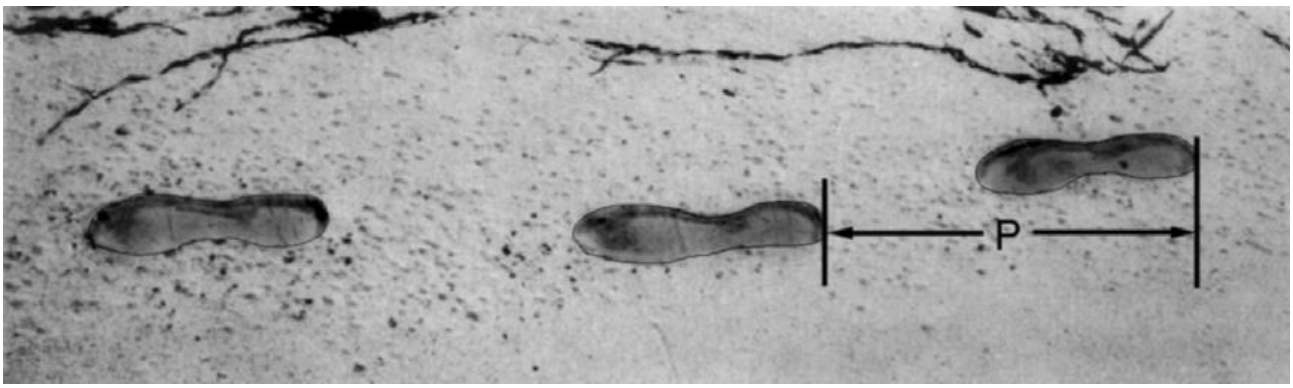
Dalle percentuali presenti in tabella si evidenzia il livello di difficoltà non elevato del quesito. Infatti più della metà degli studenti OCSE (il 55,3%) risponde correttamente. In Italia, la percentuale di risposte corretta è, comunque, elevata (54,3%) e confrontabile con la media OCSE. È da notare come un'alta percentuale sia di studenti dei paesi OCSE (13,7%) e sia di studenti italiani (13,7%) risponde la figura C, nonostante questa figura sia un triangolo che non ha un angolo retto in R e andrebbe scartata per la prima frase della descrizione ("*il triangolo PQR è un triangolo rettangolo con l'angolo retto in R")*. Questo è sinonimo del fatto che gli studenti non prestano grande attenzione alle consegne e, spesso, hanno difficoltà nella comprensione del testo.

Il quesito riguarda la geometria piana e non è inserito in un contesto reale e/o vicino al contesto di vita dello studente. Sarebbe auspicabile realizzare quesiti simili a questo riguardanti un contesto del mondo reale. Anziché considerare figure geometriche, ad esempio, si potrebbe immaginare di realizzare un quesito molto simile ma nel quale le figure geometriche siano forme di camere da letto e si può chiedere allo studente di scegliere la camera da letto che possiede alcuni requisiti.

IDEA CHIAVE: Cambiamento e relazioni

1. ANDATURA

Stimolo:



La figura mostra le orme di un uomo che cammina. La lunghezza *P* del passo è la distanza tra la parte posteriore di due orme consecutive. Per gli uomini, la formula $\frac{n}{P} = 140$ fornisce una relazione approssimativa tra *n* e *P*
dove:
n = numero di passi al minuto, e
P = lunghezza del passo in metri.

Descrizione e contesto:

Il contesto è sicuramente quello **personale**. Il quesito fornisce una relazione algebrica ben stabilita tra due variabili, il numero di passi al minuto nella camminata di una persona generica e la lunghezza del passo in metri. Per comprendere al meglio il concetto di lunghezza del passo viene mostrata un'immagine che esplicita la lunghezza citata.

Domanda 1

Se la formula si applica all'andatura di Enrico ed Enrico fa 70 passi al minuto, qual è la lunghezza del passo di Enrico? Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

Risposta: ……

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 2: 0,5m – 50 cm – ½
Punteggio parziale
Codice 1: sostituzione corretta ma risultato errato o non dato oppure trasformazione corretta senza risultato o con risultato errato
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà item:

611 (Livello 5 sulla scala complessiva di literacy matematica). Allo studente viene richiesto di utilizzare un modello, già dato, identificando i vincoli e i presupposti. Inoltre, utilizzando competenze ben sviluppate di ragionamento e riflessione, deve trovare la soluzione del problema.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Espressioni algebriche
Abilità matematiche*:* Capacità di interpretare e manipolare espressioni algebriche.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione:** relativa al solo processo di "Formulazione in forma matematica", in quanto è solo richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", lo studente deve collegare le informazioni per giungere ad una soluzione matematica.
- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni:** relativamente al processo "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto è richiesta la capacità di comprendere, interpretare, manipolare e utilizzare espressioni simboliche in un contesto matematico.

Analisi item

La domanda è del tipo "aperta a risposta univoca". Agli studenti si richiede di intervenire sui simboli ed effettuare calcoli di natura algebrica. Questo item si basa sull'utilizzo di un dato modello (una formula) per determinare l'ampiezza del passo. Come mostra la tabella in basso la percentuale di studenti italiani che risponde correttamente al quesito è 15,8% contro il 35,9% della media OCSE, mentre la percentuale di studenti che risponde in maniera parzialmente corretta, cioè coloro che hanno sostituito solo i numeri nella formula oppure hanno effettuato una sostituzione corretta ma hanno sbagliato i calcoli, è superiore alla media OCSE di circa 4 punti percentuali. Da tale analisi si evince come gli studenti italiani riscontrino enormi difficoltà nell'effettuare calcoli di natura algebrica sebbene attraverso il ragionamento riescano a capire quanto richiesto dal quesito. E' indicativo osservare che solo l'11% degli studenti del Sud riesce a dare una risposta corretta alla domanda, ciò mostra quanto il meridione sia indietro nell'apprendimento della matematica rispetto al resto del mondo ma soprattutto rispetto al nord Italia.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA - PISA 2003
M124Q01 - Andatura

	Risposta 0	*Risposta 1*	***Risposta2***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	12,7	31,6	**20,7**	0,0	34,7	0,3
Nord Est	19,2	33,5	**24,4**	0,0	21,4	1,5
Centro	14,7	26,9	**10,5**	0,0	46,2	1,8
Sud	15,4	21,5	**11,6**	0,0	45,9	5,7
Sud Isole	6,7	15,3	**13,4**	0,0	52,2	12,4
ITALIA	*13,5*	*25,6*	***15,8***	*0,0*	*40,8*	*4,3*
OCSE	*20,6*	*21,5*	***35,9***	*0,0*	*20,7*	*1,3*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.
** La risposta 1 è parzialmente corretta.

Domanda 3

Bernardo sa che la lunghezza del suo passo è di 0,80 metri. La formula viene applicata all'andatura di Bernardo. Calcola la velocità a cui cammina Bernardo esprimendola in metri al minuto e in chilometri all'ora. Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 31: Fornisce la risposta corretta sia per metri/minuto sia per km/ora
Punteggio parziale 1
Codice 21: Non effettua la moltiplicazione per 0,80 per trasformare i passi al minuto in metri al minuto
Codice 22: La velocità in metri /minuto è corretta ma la trasformazione in km/h è sbagliata o non fornita
Codice 23: Metodo corretto ma piccoli errori di calcolo
Codice 24: Indica la risposta corretta in km/h ma non in metri/minuto
Punteggio parziale 2
Codice 11: n = 140 x 0,80 =112; non è illustrato alcun ulteriore procedimento oppure il procedimento è sbagliato
Nessun punteggio
Codice 00: Altre risposte
Codice 99: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

Punteggio pieno 723 (Livello 6 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve saper utilizzare informazioni sulla base delle proprie ricerche e della modellizzazione di situazioni problematiche complesse. Deve avere una padronanza delle operazioni e delle relazioni matematiche simboliche.
Punteggio parziale 1: 666 (Livello 5 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve mettere a punto e utilizzare modelli per situazioni complesse.
Punteggio parziale 2: 605 (livello 4 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente sa lavorare con modelli espliciti di complesse situazioni concrete che possono comportare vincoli e richiedere deduzioni.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Espressioni algebriche. Unità di misura
Abilità matematiche*:* Capacità di interpretare e manipolare espressioni algebriche. Saper effettuare conversioni delle unità di misura.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti, ed al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto lo studente deve illustrare il lavoro necessario per giungere alla soluzione.
- **Matematizzazione**: relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", per risolvere il secondo quesito lo studente deve elaborare un modello proporzionale per calcolare la velocità di Bernardo nelle unità richieste.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", lo studente deve collegare le informazioni per giungere ad una soluzione matematica.
- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni**: relativa al processo "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto è richiesta la capacità di comprendere, interpretare e manipolare e utilizzare espressioni simboliche in un contesto matematico.

Analisi item

La domanda è del tipo "aperta a risposta univoca". Agli studenti si richiede di intervenire sui simboli ed effettuare calcoli di natura algebrica. Questo item si basa sull'utilizzo di un dato modello (una formula) per determinare la velocità di cammino. La domanda 3 rientra tra quelle più difficili somministrate nel 2003, infatti solo il 7,9% nell'OCSE

e il 2,1% in Italia riesce a dare una risposta totalmente corretta. Si riscontrano difficoltà nell'effettuare le conversioni tra unità di misura.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA - PISA 2003

M124Q03T - Andatura

	Risposta 0	*Risposta 1*	*Risposta 2*	***Risposta3***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	17,8	17,4	4,2	**1,7**	0,0	58,6	0,3
Nord Est	22,8	16,6	4,9	**4,6**	0,0	48,9	2,1
Centro	10,7	9,1	2,4	**3,5**	0,0	72,5	1,8
Sud	13,1	8,7	0,7	**1,2**	0,0	69,5	6,8
Sud Isole	8,1	7,7	3,0	**0,5**	0,0	66,6	14,1
ITALIA	*14,3*	*11,9*	*2,9*	***2,1***	*0,0*	*63,9*	*5,0*
OCSE	*24,0*	*19,6*	*8,8*	***7,9***	*0,0*	*38,0*	*1,8*

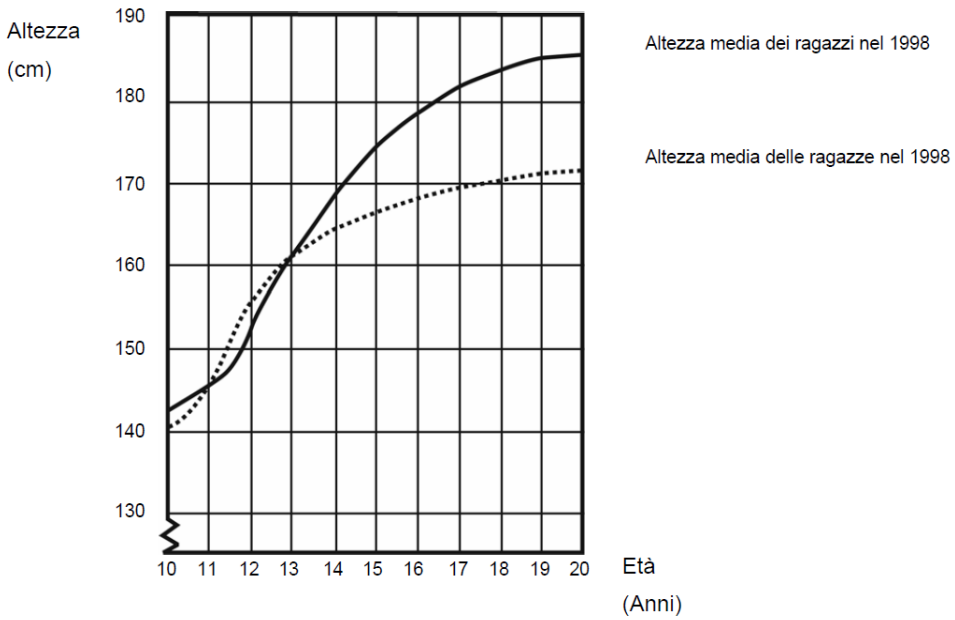
* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.
** Le risposte 1e 2 sono parzialmente corrette.

2. LA CRESCITA

Stimolo

I GIOVANI DIVENTANO PIÙ ALTI

Il grafico seguente mostra l'altezza media dei ragazzi e delle ragazze olandesi nel 1998.



Descrizione e contesto

Il contesto è quello **sociale**, in quanto riguarda statistiche nazionali dell'Olanda. Il quesito, infatti, descrive, attraverso un grafico formato da due curve, l'altezza media dei ragazzi e delle ragazze olandesi nell'anno 1998.

Domanda 1

A partire dal 1980 l'altezza media delle ragazze di 20 anni è aumentata di 2,3 cm arrivando a 170,6 cm. Qual era l'altezza media delle ragazze di 20 anni nel 1980?

Risposta: .....cm

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: 168,3 cm (l'unità di misura non è richiesta)
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

477 (Livello 2 sulla scala complessiva di literacy in matematica). Allo studente viene richiesta una deduzione diretta. La risposta va ricercata nella domanda, il grafico rappresenta in questo caso un distrattore.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare**.**
Abilità matematiche*:* Non sono richieste abilità particolari, lo studente deve calcolare l'altezza media delle ragazze del 1980 utilizzando i dati presenti nella domanda.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al solo processo di "Formulazione in forma matematica", in quanto è solo richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", lo studente deve collegare le informazioni fornite per giungere ad una soluzione matematica.

Analisi item:

La domanda è del tipo "aperta a risposta univoca". L'unica difficoltà che lo studente può incontrare è relativa al solo processo di decodifica-interpretazione del testo. Lo studente deve riuscire a comprendere che tutte le informazioni necessarie sono insite nel quesito e che dal grafico non potrà trarre nessuna informazione utile. La percentuale di risposte corrette in Italia è molto vicina alla media OCSE, probabilmente ciò è dovuto al basso livello di difficoltà dell'item. Il sud presenta sempre grandi difficoltà nell'approcciarsi alla matematica; anche di fronte ad un quesito ritenuto facile solo il 54,1% degli studenti riesce a fornire una risposta corretta.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M150Q01 - La crescita

	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	16,3	**73,3**	0,0	8,7	1,6
Nord Est	16,8	**73,4**	0,0	7,4	2,4
Centro	18,9	**66,2**	0,0	11,4	3,6
Sud	22,3	**54,1**	0,0	15,9	7,7
Sud Isole	23,8	**58,0**	0,0	13,0	5,1
ITALIA	*19,9*	***64,2***	*0,0*	*11,6*	*4,3*
OCSE	*24,0*	***65,1***	*0,0*	*8,1*	*2,7*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Domanda 3

Spiega in che modo il grafico mostra che, in media, la crescita delle ragazze è più lenta dopo i 12 anni.
Risposta: …….

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 11: Fa riferimento alla diminuzione di pendenza della curva a partire dai 12 anni utilizzando espressioni della vita quotidiana.
Codice 12: Fa riferimento alla diminuzione di pendenza della curva a partire dai 12 anni utilizzando un linguaggio matematico
Codice 13: Paragona i due tassi di crescita effettivi
Nessun punteggio
Codice 01: Lo studente indica che l'altezza delle ragazze diviene inferiore a quella dei ragazzi ma non menziona la pendenza
Codice 02: Altre Risposte sbagliate
Codice 99: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

574 (Livello 4 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve possedere una flessibilità di ragionamento. Partendo da rappresentazioni simboliche lo studente deve collegarle a situazioni del mondo reale e riuscire ad argomentare le proprie interpretazioni.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Rappresentazioni grafiche**.**
Abilità matematiche*:* Allo studente viene richiesta la capacità di estrarre informazioni utili dai grafici e fornire riflessioni sui risultati matematici.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti e al processo "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici", in quanto lo studente deve comunicare e spiegare le riflessioni a cui è giunto.

- **Rappresentazione:** relativa al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici", in quanto è richiesta la capacità di interpretare i risultati matematici forniti nel grafico.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "formulazione di situazioni in forma matematica", lo studente deve saper spiegare la rappresentazione della situazione individuata

Analisi item:

La domanda è "a risposta aperta articolata". Lo studente deve fornire una risposta un po' elaborata, cercando di spiegare il ragionamento seguito per trovare la soluzione. Sebbene vengano considerate corrette tutte le risposte che menzionano la pendenza della curva anche senza l'utilizzo di un linguaggio prettamente matematico, solo il 28,9% degli studenti italiani riesce a fornire la risposta corretta. La maggiore difficoltà sta, forse, nel riuscire a descrivere correttamente quanto osservato nel grafico. E' interessante notare che appena aumenta il livello di difficoltà dell'item così aumenta il gap tra le percentuali di risposte corrette date dagli studenti italiani e quelle date dagli studenti appartenenti ai paesi aderenti all'OCSE. La media delle risposte corrette ottenuta in Italia è di circa 15 punti percentuali in meno rispetto al resto del mondo. Se ci riferiamo solo al Sud osserviamo che esso ottiene solo il 17,6% di risposte esatte, ottenendo un divario di circa 26 punti percentuali.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M150Q03t - La crescita

	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	34,2	**45,3**	0,0	18,7	1,7
Nord Est	39,3	**41,2**	0,0	17,2	2,4
Centro	38,2	**28,0**	0,0	30,2	3,6
Sud	37,2	**17,6**	0,0	37,4	7,7
Sud Isole	37,5	**17,2**	0,0	39,8	5,5
ITALIA	*37,1*	***28,9***	*0,0*	*29,5*	*4,4*
OCSE	*33,1*	***43,5***	*0,0*	*20,5*	*2,9*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Domanda 2

In base al grafico, in che periodo della vita le ragazze sono, in media, più alte dei maschi della stessa età?
Risposta: .....

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 21: indica l'intervallo corretto
Codice 22: indica che le ragazze sono più alte dei ragazzi tra gli 11 e i 12 anni
Punteggio parziale
Codice 11: indica altri gruppi d'età (11,12,13)
Nessun punteggio
Codice 00: Altre risposte
Codice 99: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

Punteggio pieno 525 (Livello 3 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello si chiede allo studente di interpretare rappresentazioni grafiche costruendo un piccolo ragionamento.
Punteggio parziale 420 (Livello 2 sulla scala complessiva di literacy in matematica). Lo studente è in grado di interpretare e riconoscere situazioni in contesti che richiedono al massimo deduzioni dirette, ricavare informazioni pertinenti da un'unica fonte. Lo studente a questo livello può fare un ragionamento diretto e fornire un'interpretazione letterale dei risultati.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Rappresentazioni grafiche**.**
Abilità matematiche*:* Allo studente viene richiesta la capacità di estrarre informazioni utili dai grafici e fornire riflessioni sui risultati matematici.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti e al processo "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici", in quanto lo studente deve comunicare e spiegare le riflessioni a cui è giunto.
- **Rappresentazione:** relativa al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici", in quanto è richiesta la capacità di interpretare i risultati matematici forniti nel grafico.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", lo studente deve saper spiegare la rappresentazione della situazione individuata

Analisi item:

La domanda è del tipo "aperta a risposta univoca". Si chiede agli studenti di individuare dal grafico l'intervallo d'età in cui l'altezza delle ragazze è, in media, superiore a quella dei ragazzi. Solo il 35 % degli studenti italiani, e il 22% degli studenti del meridione, riesce a fornire una risposta corretta. Si evince chiaramente che gli studenti presentano enormi difficoltà nell'interpretare i grafici anche se le richieste sono di un livello medio-basso.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M150Q02t - La crescita

	Risposta 0	*Risposta 1*	***Risposta2***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	5,4	38,1	**47,4**	0,0	7,1	1,9
Nord Est	6,3	36,8	**48,3**	0,0	5,8	2,8
Centro	7,8	37,7	**40,3**	0,0	10,0	4,2
Sud	14,1	37,7	**21,9**	0,0	17,7	8,6
Sud Isole	14,5	36,0	**23,9**	0,0	18,9	6,8
ITALIA	*10,0*	*37,3*	***35,1***	*0,0*	*12,5*	*5,1*
OCSE	*9,4*	*27,2*	***53,0***	*0,0*	*7,3*	*3,2*

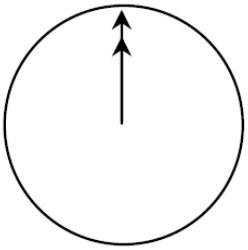
* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

** La risposta 1 è parzialmente corretta.

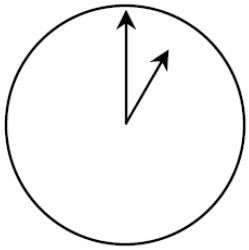
3. CHIACCHIERATA VIA INTERNET

Stimolo

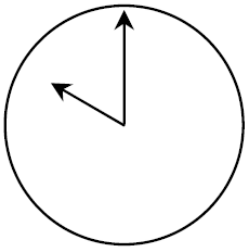
Mark (da Sydney, Australia) e Hans (da Berlino, Germania) comunicano spesso tra loro utilizzando le «chat» su Internet. Per poter chattare devono collegarsi a Internet nello stesso momento. Per trovare un'ora appropriata per chattare Mark ha consultato una tabella dei fusi orari e ha trovato quanto segue:



Greenwich 0:00 (mezzanotte)



Berlino 1:00 di notte



Sydney 10:00 di mattina

Descrizione e contesto:

Il contesto è di tipo **personale**. Il problema è quello di trovare un'ora appropriata per permettere a due amici di chattare. Viene fornito un semplice disegno per mostrare i fusi orari delle due città di interesse.

Domanda 1

Quando sono le 19:00 a Sydney, che ora è a Berlino?
Risposta: .....

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: le 10 di mattina o le 10:00
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

533 (Livello 3 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve saper selezionare e applicare semplici strategie per risolvere problemi. Attraverso un semplice ragionamento deve fornire l'ora della città di Berlino quando a Sydney sono le ore 19:00.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare.
Abilità matematiche*:* Il quesito non richiede particolari abilità matematiche ma solo deduzione e ragionamento.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.
- **Matematizzazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", lo studente deve utilizzare la comprensione del contesto per organizzare il processo matematico di risoluzione.

- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", lo studente deve saper collegare le informazioni per giungere ad una soluzione matematica.
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di elaborare un piano per inquadrare i problemi contestualizzati in forma matematica.

Analisi item:

La domanda è del tipo "a risposta aperta univoca". Eccezionalmente in questa domanda la percentuale di risposte corrette dati dagli studenti italiani è maggiore rispetto alla media OCSE. Probabilmente ciò è dovuto al fatto che la domanda si riferisce ad un contesto molto familiare ad un ragazzino di 15 anni. Il livello è lo stesso presente nella domanda 2 di "La crescita", tuttavia non si riscontrano le stesse difficoltà. Il docente allora dovrebbe provare a chiedersi il perché di un tale accadimento.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M402Q01- Chiacchierata via Internet

	Risposta 0	***Risposta1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	30,0	**66,4**	0,0	2,6	1,1
Nord Est	31,5	**63,5**	0,0	2,5	2,4
Centro	36,3	**54,3**	0,0	6,4	3,1
Sud	38,8	**48,6**	0,0	6,8	5,8
Sud Isole	44,0	**41,1**	0,0	9,7	5,2
ITALIA	*36,4*	***54,2***	*0,0*	*5,8*	*3,6*
OCSE	*41,8*	***52,5***	*0,0*	*3,5*	*2,2*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Domanda 2

Mark e Hans non possono chattare tra le 9:00 e le 16:30 della loro rispettiva ora locale, perché devono andare a scuola. Inoltre, dalle 23:00 alle 7:00 ora locale non possono chattare perché stanno dormendo.

Qual è un'ora giusta per Mark e Hans per chattare? Scrivi le rispettive ore locali nella tabella.

Luogo	Ora
Sydney	
Berlino	

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: qualsiasi ora o intervallo di ore che rispetti le 9 ore di differenza e sia compreso in uno di questi intervalli: Sydney 16:30 – 18:00; Berlino 7.30 – 9:00
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

636 (Livello 5 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve saper valutare la strategia appropriata alla soluzione del problema. Deve essere in grado di affrontare situazioni da un'angolazione strategica ricorrendo a competenze ben sviluppate di ragionamento e riflessione.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare.
Abilità matematiche*:* Il quesito non richiede particolari abilità matematiche ma solo deduzione e ragionamento.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.
- **Matematizzazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto lo studente deve utilizzare la comprensione del contesto per organizzare un processo matematico di risoluzione.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici", in quanto è richiesta la capacità di riflettere sulle soluzioni matematiche ed elaborare spiegazioni che supportino il problema.
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica". Lo studente deve selezionare una strategia per inquadrare i problemi contestualizzati in forma matematica.

Analisi item

La domanda è del tipo "a risposta aperta univoca". Allo studente viene chiesto di trovare un orario che permetta ad entrambi i ragazzi di chattare, ragionando quindi su tutte le 24 ore della giornata. Nonostante la domanda rientri tra quelle classificate a livello 5 di difficoltà, il divario tra Italia e "resto del mondo" è solo dell'1%. Probabilmente gli studenti non riscontrano molte difficoltà poiché viene richiesta solo un'ora accettabile tra tutte quelle possibili, rendendo in questo modo l'item più facile.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003
M402Q02- Chiacchierata via Internet

	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	39,4	**37,2**	0,0	21,9	1,4
Nord Est	37,2	**37,1**	0,0	23,1	2,6
Centro	47,5	**25,7**	0,0	22,4	4,5
Sud	40,9	**21,0**	0,0	31,6	6,5
Sud Isole	44,3	**17,1**	0,0	33,4	5,2
ITALIA	*42,0*	***27,0***	*0,0*	*26,8*	*4,2*
OCSE	*50,7*	***28,1***	*0,0*	*18,7*	*2,5*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

4. L'AUTOMOBILE MIGLIORE

Stimolo

Una rivista di automobilismo usa un sistema di punteggi per valutare le nuove automobili e assegna il premio «Auto dell'Anno» all'automobile con il punteggio totale più alto. Vengono valutate cinque nuove automobili e i loro punteggi sono mostrati nella seguente tabella.

Automobile	Dispositivi Di sicurezza (S)	Consumo di Carburante (C)	Aspetto Estetico (E)	Accessori Interni (A)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Ai punteggi corrispondono le seguenti valutazioni:
3 punti = Eccellente
2 punti = Buono
1 punto = Mediocre

Descrizione e contesto

Il contesto della prova potrebbe essere di tipo **sociale**. Il problema considerato è quello di stilare una classifica per assegnare un premio all'automobile considerata la migliore dell'anno. Viene fornita una semplice tabella, la quale fornisce i punteggi relative alle caratteristiche che verranno valutate.

Domanda 1

Per calcolare il punteggio totale di un'automobile, la rivista di automobilismo usa la seguente formula, che è una somma ponderata dei singoli punteggi:

$$\text{Punteggio totale} = (3 \times S) + C + E + A$$

Calcola il punteggio totale ottenuto dall'automobile «Ca». Scrivi la tua risposta nello spazio qui sotto.
Punteggio totale per «Ca»: .....

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: 15 punti
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

447 (Livello 2 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve saper interpretare situazioni in contesti che richiedono deduzioni dirette. In questo caso si richiede allo studente di utilizzare una formula già data al fine di valutare il punteggio di una relativa automobile.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare.
Abilità matematiche*:* Manipolare espressioni algebriche

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.
- **Matematizzazione:** relativa al processo "Formulazione di situazioni in forma matematica", poiché lo studente deve identificare le variabili e le strutture matematiche soggiacenti al problema reale.
- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico di operazioni:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici". Allo studente viene richiesta la capacità di comprendere e utilizzare costrutti formali. In questo caso, partendo dalla formula generale, dovrà riuscire a calcolare il punteggio relativo all'automobile *Ca*.

Analisi item

La domanda è del tipo "a risposta aperta univoca". Lo studente deve solo sostituire le variabili presenti nei dati utilizzando una formula già data. Nonostante ciò soltanto il 65,4% degli studenti italiani riesce a fornire la risposta esatta, contro il 71,6% ottenuto dagli studenti dell'OCSE. Il problema principale potrebbe essere stato riscontrato nel processo di matematizzazione, e, in particolare, nell'identificare le variabili contenute nella formula.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M704Q01- L'automobile migliore

	Risposta 0	***Risposta1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	16,7	**72,4**	3,2	5,5	2,2
Nord Est	15,5	**75,6**	3,1	4,1	1,7
Centro	14,7	**69,7**	3,1	10,4	2,1
Sud	21,5	**56,2**	4,7	12,6	5,1
Sud Isole	23,8	**56,9**	2,3	12,6	4,5
ITALIA	*18,7*	***65,4***	*3,3*	*9,3*	*3,2*
OCSE	*16,7*	***71,6***	*9,9*		*1,8*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Domanda 2

Il produttore dell'automobile «Ca» ha ritenuto ingiusta la regola utilizzata per calcolare il punteggio totale.
Scrivi una regola per calcolare il punteggio totale che permetta all'automobile «Ca» di vincere. La tua regola dovrà includere tutte e quattro le variabili e dovrai scrivere la regola inserendo numeri positivi nei quattro spazi della formula qui sotto.

Punteggio totale: .....× S + ... × C + ... × E + ... × A

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: regola corretta che fa vincere Ca
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

657 (Livello 5 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve saper selezionare una strategia appropriata alla soluzione del problema.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare.
Abilità matematiche*:* Capacità di manipolare espressioni algebriche.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.
- **Matematizzazione:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto viene richiesta la capacità di identificare le variabili e le strutture matematiche soggiacenti al problema reale e successivamente formulare delle ipotesi per poterle utilizzare.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto allo studente si chiede di collegare le informazioni per giungere a una soluzione matematica e saper giustificare il procedimento usato per determinare la soluzione di natura matematica.
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto è richiesta la capacità di attivare meccanismi di controllo efficaci per giungere alla soluzione matematica.
- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico di operazioni:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici". Allo studente viene richiesta la capacità di comprendere, interpretare, manipolare e utilizzare espressioni simboliche in un contesto matematico.

Analisi item

La domanda è del tipo "a risposta aperta". Le risposte possibili sono molteplici, poiché sono svariate le regole che farebbero vincere l'automobile Ca. L'Italia ottiene solo il 16,6% di risposte esatte mentre il resto del mondo il 24,9%. Il Sud ottiene un punteggio ancora più basso, solo l'8,8%. Bisognerebbe provare a comprendere il perché di tante difficoltà in un item poi non così complicato. I docenti dovrebbero interrogarsi sui metodi di insegnamento utilizzati e cercare di comprendere dove nasca il problema.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M704Q02 - L'automobile migliore

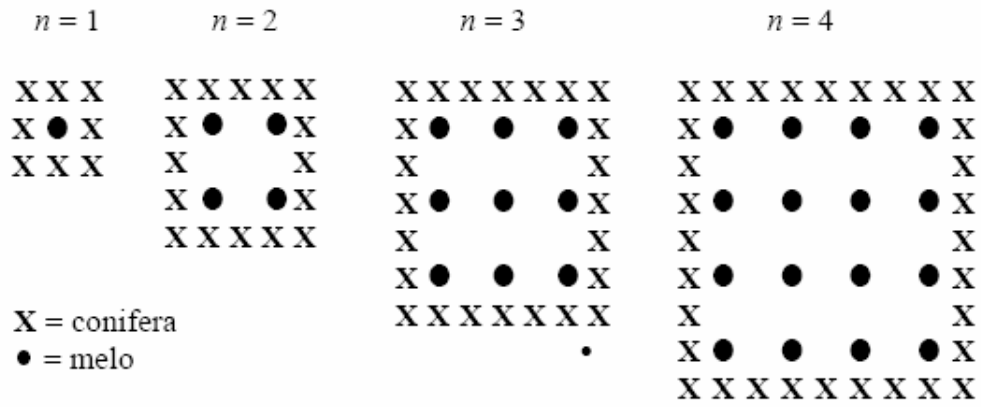
	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	49,5	**27,1**	0,8	20,1	2,5
Nord Est	50,7	**22,3**	0,3	24,7	2,0
Centro	45,9	**17,9**	1,2	31,5	3,4
Sud	52,1	**8,8**	0,6	33,2	5,4
Sud Isole	52,1	**8,8**	1,2	32,5	5,5
ITALIA	*50,2*	***16,6***	*0,8*	*28,5*	*3,9*
OCSE	*54,0*	***24,9***	*18,9*		*2,2*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

5. MELI

Stimolo

Un agricoltore pianta dei meli in modo da formare un quadrato. Per proteggere questi alberi dal vento, pianta delle conifere intorno al frutteto. Qui sotto puoi vedere uno schema che rappresenta la disposizione dei meli e delle conifere per un numero qualsiasi (n) di filari di meli:



Descrizione e contesto

Il contesto è quello **personale**, il problema è quello di piantare delle conifere intorno a degli alberi di melo per proteggerli dal vento formando un quadrato. Viene fornito uno schema che permette di comprendere la disposizione dei meli e delle conifere al variare dei numeri n di filari.

Domanda 1

Completa la tabella:

n=	Numero di meli	Numero di conifere
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 21: tutti i sette numeri inseriti nella tabella sono corretti
Punteggio parziale
Codice 11: i dati inseriti per n=2,3,4 sono corretti ma un dato per n=5 è sbagliato o mancante
Codice 12: i dati inseriti per n=5 sono corretti, ma un dato per n=2 oppure 3 oppure 4 è sbagliato o mancante
Nessun punteggio
Codice 01: Dati corretti per n=2,3,4 ma entrambi i dati per n=5 sono sbagliati
Codice 02: Altre risposte
Codice 99: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

484 (Livello 4 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve essere in grado di utilizzare competenze ben sviluppate e flessibilità di ragionamento. Devono saper selezionare ed integrare rappresentazioni simboliche collegandole a situazioni del mondo reale.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Calcolo elementare.
Abilità matematiche*:* Il quesito non richiede particolari abilità matematiche se non semplice ragionamento e deduzione.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.
- **Matematizzazione:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto viene richiesto allo studente di trasformare un problema definito nel mondo reale in una forma matematica.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto allo studente si chiede di collegare le informazioni per giungere a una soluzione matematica che permetta di calcolare il numero di meli e delle conifere da piantare al variare del numero di filari di meli.
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** relativa al processo di "formulazione di situazioni in forma matematica", lo studente deve saper elaborare una strategia per inquadrare i problemi contestualizzati in forma matematica.

- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di utilizzare variabili e modelli standard al fine di rappresentare un problema reale attraverso un linguaggio simbolico/formale.

Analisi item

La domanda è del tipo "a risposta aperta univoca", viene richiesto di completare la tabella dopo aver compreso qual è la legge matematica che descrive il problema. Solo il 35,7% degli studenti italiani riesce a completare correttamente la tabella mentre quasi il 50% non riesce a fornire la risposta corretta, commettendo più di un errore. Tali risultati sono in contrasto con gli esiti ottenuti nei paesi aderenti all'organizzazione OCSE. In questi, infatti, quasi il 50% delle risposte risultano corrette mentre solo il 35% degli studenti commette più di un errore.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA - PISA 2000
M136Q01T Meli

	Risposta 0	*Risposta 1*	***Risposta 2***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	45,8	11,7	**40,2**	0,0	2,1	0,2
Nord Est	40,6	8,2	**48,2**	0,0	0,9	2,1
Centro	54,6	13,1	**29,9**	0,0	1,2	1,2
Sud	52,7	9,1	**32,2**	0,0	2,6	3,4
Sud Isole	52,0	8,5	**29,9**	0,0	4,8	4,8
ITALIA	*49,4*	*10,2*	***35,7***	*0,0*	*2,4*	*2,3*
OCSE	*35,1*	*12,4*	***49,2***	*0,0*	*2,0*	*1,3*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.
** La risposta 1 è parzialmente corretta.

Domanda 2

Con le due formule seguenti puoi calcolare il numero di meli e il numero di conifere della disposizione descritta prima:

Numero di meli = n^2
Numero di conifere = $8n$

dove *n* è il numero di filari di meli.

Vi è un valore di n per cui il numero di meli è uguale al numero di conifere. Trova il valore di n e mostra il metodo che hai usato per calcolarlo.

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 11: n=8 utilizzando il metodo algebrico
Codice 12: n=8 ma il metodo algebrico presentato non è chiaro oppure non è mostrato
Codice 13: n=8 utilizzando altri metodi (es: prolungamento della sequenza, disegni...)
Codice 14: come per il codice 11 ma fornisce entrambe le risposte n=8 e n=0
Codice 15: come per il codice 12 ma fornisce entrambe le risposte n=8 e n=0
Nessun punteggio
Codice 00: Altre risposte
Codice 99: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

655 (Livello 5 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve mettere a punto e utilizzare modelli per situazioni complesse, identificando i vincoli e specificando i presupposti.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: risoluzione di equazioni di secondo grado.
Abilità matematiche*:* Lo studente deve comprendere che per verificare se vi è un valore di n per cui il numero di mele sia uguale al numero di conifere deve imporre l'uguaglianza tra le formule fornite.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti, e al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto l'alunno deve presentare i risultati matematici intermedi necessari per giungere alla soluzione.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", poiché lo studente deve spiegare il procedimento usato per determinare il risultato.
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** relativa al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici", poiché viene richiesta la capacità di elaborare e mettere in atto una strategia finalizzata a convalidare una soluzione matematica ad un problema contestualizzato.
- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni:** relativa al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici", in quanto lo studente deve comprendere la relazione esistente tra il contesto del problema e la rappresentazione della soluzione matematica.

Analisi item

La domanda è del tipo "a risposta aperta articolata". Sebbene la domanda sia posta in modo chiaro, pochi studenti italiani (solo il 20,9%) riescono a comprendere che per risolvere il problema basta stabilire quali valori di n sono soluzione dell'equazione $n^2 = 8n$. Il livello di difficoltà di questo quesito è abbastanza alto, appartiene infatti al livello 5 della scala stabilita dall'OCSE, tuttavia l'Italia ottiene soli 4 punti percentuali in meno rispetto agli altri paesi.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA - PISA 2000
M136Q02T - Meli

	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	16,5	**26,1**	0,0	57,2	0,2
Nord Est	15,6	**33,8**	0,0	48,6	2,1
Centro	12,9	**18,6**	0,0	67,2	1,2
Sud	13,4	**17,1**	0,0	65,8	3,6
Sud Isole	13,3	**10,9**	0,0	70,0	5,8
ITALIA	*14,4*	***20,9***	*0,0*	*62,2*	*2,5*
OCSE	*23,6*	***24,5***	*0,0*	*50,3*	*1,6*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Domanda 3

Supponi che l'agricoltore voglia ingrandire il frutteto con molti filari di alberi. Man mano che l'agricoltore ingrandisce il frutteto, che cosa aumenta più velocemente: il numero di meli o il numero di conifere? Spiega come hai trovato la risposta.
Risposta: ……..

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 21: Risposta corretta data con spiegazioni algebriche basata sulle espressioni n^2 e 8n
Punteggio parziale
Codice 11: Risposta corretta motivata con esempi o attraverso l'estensione della tabella
Nessun punteggio
Codice 01: Risposta corretta con spiegazione sbagliata o non data
Codice 02: Altre risposte
Codice 99: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

Punteggio pieno 723 (Livello 6 sulla scala complessiva di literacy in matematica).
Punteggio parziale 672 (Livello 6 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve generalizzare e utilizzare informazioni sulla base delle proprie ricerche e della modellizzazione di situazioni problematiche complesse. Deve saper fare riflessioni e ragionamenti matematici difficili.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: il concetto di funzione, espressioni algebriche.
Abilità matematiche*:* Capacità di confrontare diverse funzioni e capendo quale tra queste va più velocemente a $+\infty$.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti e al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici", poiché allo studente viene richiesta la capacità di elaborare e comunicare spiegazioni e argomentazioni nel contesto del problema.
- **Matematizzazione:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto lo studente deve saper identificare le variabili e le strutture matematiche soggiacenti al problema reale.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di spiegare e giustificare la situazione individuata.
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", poiché lo studente deve elaborare un piano per inquadrare i problemi contestualizzati in forma matematica.

Analisi item

La domanda è "a risposta aperta articolata". Lo studente deve saper individuare il maggior accrescimento del numero di meli del frutteto all'aumentare del numero di filari. Sebbene la domanda sia posta in maniera chiara, solo il 10% circa degli studenti italiani riesce a comprendere la risposta corretta, anche se solo il 3,6% fornisce anche motivazioni di tipo algebrico. Si evince una forte difficoltà nella comprensione dell'andamento delle funzioni elementari.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA - PISA 2000

M136Q03T- Meli

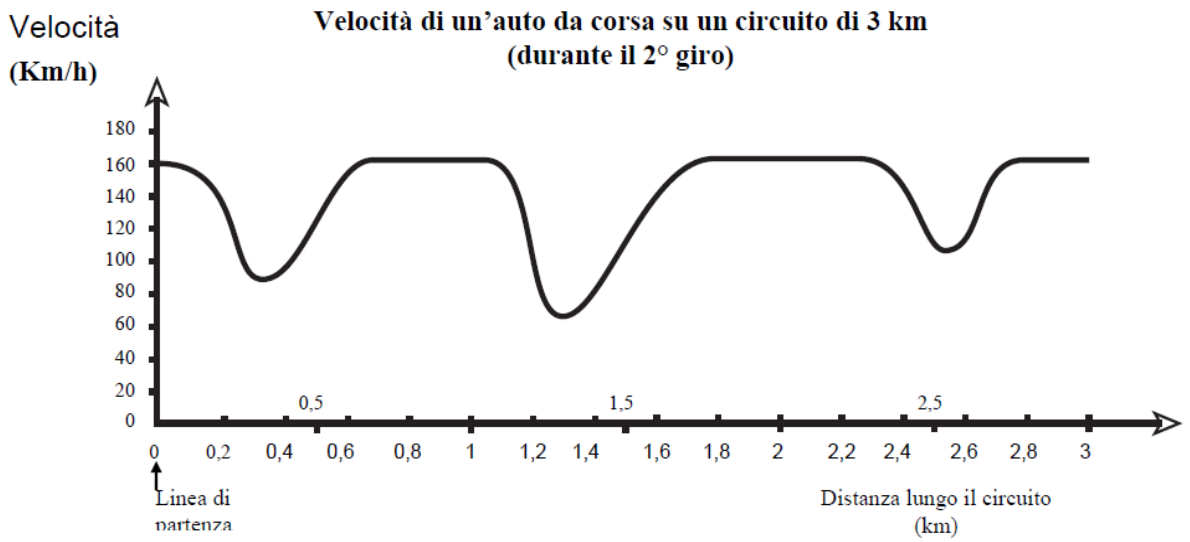
	Risposta 0	*Risposta 1*	***Risposta 2***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	56,0	9,2	**4,4**	0,0	28,5	1,9
Nord Est	53,7	10,3	**8,3**	0,0	24,4	3,3
Centro	50,2	8,0	**3,2**	0,0	32,8	5,8
Sud	48,0	3,8	**1,5**	0,0	38,9	7,8
Sud Isole	50,8	4,0	**1,9**	0,0	32,7	10,6
ITALIA	*51,8*	*6,9*	***3,6***	*0,0*	*32,0*	*5,8*
OCSE	*51,1*	*10,2*	***7,9***	*0,0*	*27,8*	*3,0*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.
** La risposta 1 è parzialmente corretta.

6. VELOCITA' DI UN'AUTO DA CORSA

Stimolo

Il grafico mostra come varia la velocità di un'auto da corsa mentre percorre il secondo giro di un circuito pianeggiante lungo 3 chilometri.



Descrizione e contesto:

Il contesto è quello personale, infatti il quesito riguarda la velocità di un'auto da corsa mentre percorre un circuito. Viene fornito un grafico distanza/velocità relativo al secondo giro dell'automobile all'interno del percorso.

Domanda 1

Qual è la distanza approssimativa tra la linea di partenza e l'inizio del tratto rettilineo più lungo del circuito?

A 0,5 km.
B 1,5 km.
C 2,3 km.
D 2,6 km.

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: B
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

492 (Livello 3 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve saper scegliere semplici strategie per risolvere problemi e saper interpretare ed utilizzare le rappresentazioni date.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: rappresentazioni grafiche, interpretazione dei dati.
Abilità matematiche*:* capacità di leggere ed interpretare i grafici.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.
- **Rappresentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto viene richiesta la capacità di interpretare le rappresentazioni per riuscire a farsi un'idea della situazione.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di analizzare e collegare gli elementi di un problema in modo da poterne trarre delle conclusioni.

Analisi item

La domanda è del tipo "a scelta multipla" con un'unica risposta corretta. Per risolvere il quesito lo studente deve prima individuare il tratto rettilineo più lungo, dopodiché calcolare la distanza dal punto di partenza. Tali dati si rilevano facilmente dal grafico. La domanda è una delle poche a cui più della metà degli studenti italiani riesce a dare una risposta corretta. Tuttavia, si evince comunque un forte divario con il resto del mondo che riesce a raggiungere più del 66% di risposte corrette.

M159Q01- VELOCITÀ DI UN'AUTO DA CORSA

	Risposta 1	***Risposta 2***	*Risposta 3*	*Risposta 4*	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	14,5	**59,8**	12,9	8,4	0,0	3,7	0,6
Nord Est	13,1	**66,8**	8,6	6,5	0,0	2,8	2,3
Centro	15,5	**53,1**	10,6	13,5	0,0	5,9	1,5
Sud	16,3	**46,5**	16,3	8,0	0,0	9,0	4,0
Sud Isole	11,2	**44,1**	15,0	17,9	0,0	8,1	3,7
ITALIA	*14,3*	***53,3***	*13,1*	*10,8*	*0,0*	*6,1*	*2,4*
OCSE	*11,4*	***66,2***	*10,6*	*7,6*	*0,1*	*3,1*	*1,1*

La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta

Domanda 2

Dove è stata registrata la velocità minima durante il secondo giro?

A. Sulla linea di partenza.
B. A circa 0,8 km.
C. A circa 1,3 km.
D. A metà della pista.

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: C
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

403 (Livello 1 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve saper identificare informazioni esplicite ed eseguire procedure di routine.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: rappresentazioni grafiche, interpretazione dei dati.
Abilità matematiche*:* capacità di leggere ed interpretare i grafici.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.
- **Rappresentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto viene richiesta la capacità di interpretare la rappresentazione per riuscire a farsi un'idea della situazione.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di analizzare e collegare gli elementi di un problema in modo da poterne trarre delle conclusioni.

Analisi item

La domanda è a risposta multipla con un'unica risposta corretta. La domanda chiede di individuare la velocità minima registrata durante il secondo giro e ciò è possibile osservando il grafico ed individuando il punto "più basso" su di esso. Il livello di difficoltà di questo item è il più basso possibile e sebbene quasi il 72% degli studenti italiani risponda correttamente, resta comunque un forte disparità con il resto del mondo che ottiene il 10% in più di risposte corrette.

Percentuali di risposte degli studenti
MATEMATICA - PISA 2000
M159Q02- VELOCITÀ DI UN'AUTO DA CORSA

	Risposta 1	*Risposta 2*	***Risposta 3***	*Risposta 4*	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	5,1	4,7	**81,6**	5,5	0,0	2,1	1,1
Nord Est	5,1	1,1	**85,9**	4,5	0,1	1,0	2,3
Centro	10,5	2,9	**72,9**	7,6	0,0	3,7	2,4
Sud	11,1	4,0	**65,0**	9,9	0,5	5,2	4,3
Sud Isole	10,8	5,6	**55,8**	18,2	0,0	4,8	4,8
ITALIA	*8,6*	*3,9*	***71,7***	*9,3*	*0,1*	*3,5*	*3,0*
OCSE	*5,5*	*2,8*	***82,1***	*6,2*	*0,2*	*1,7*	*1,5*

La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta

Domanda 3

Cosa puoi dire della velocità dell'auto tra il chilometro 2,6 il chilometro 2,8?

A. La velocità dell'auto rimane costante.
B. La velocità dell'auto sta aumentando.
C. La velocità dell'auto sta diminuendo.
D. La velocità dell'auto non può essere determinata in base al grafico.

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: B
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

413 (Livello 1 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve saper identificare informazioni esplicite ed eseguire procedure di routine.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: rappresentazioni grafiche, interpretazione dei dati.
Abilità matematiche*:* capacità di leggere ed interpretare i grafici.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.

- **Rappresentazione:** relativa al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici", in quanto viene richiesta la capacità di interpretare le rappresentazioni per riuscire a farsi un'idea della situazione.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di analizzare e collegare gli elementi di un problema in modo da poterne trarre delle conclusioni.

Analisi item

Anche quest'ultima domanda è del tipo a risposta multipla ed il suo livello di difficoltà è 1, il più basso possibile. Come nel caso precedente una gran percentuale di studenti risponde correttamente (il 77,45 in Italia contro l'81,4% nei paesi OCSE). Questi esiti positivi devono far riflettere. Negli altri item in cui vi era un utilizzo di qualche grafico gli studenti hanno sempre incontrato grandi difficoltà, mentre, in questo caso, ciò non è avvenuto. La motivazione è forse da ricercarsi nella semplicità delle domande proposte.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA - PISA 2000

M159Q03- VELOCITÀ DI UN'AUTO DA CORSA

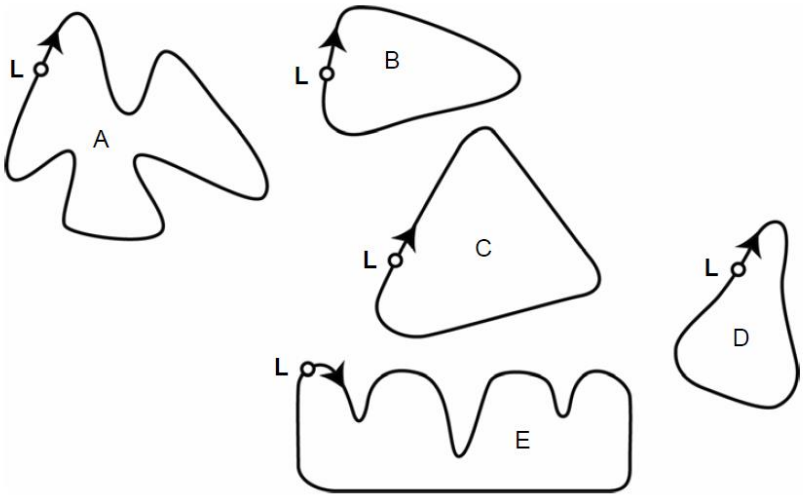
	Risposta 1	***Risposta 2***	*Risposta 3*	*Risposta 4*	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	1,5	**85,7**	7,5	2,4	0,0	1,8	1,1
Nord Est	1,2	**88,4**	4,8	2,8	0,0	0,5	2,3
Centro	1,0	**73,2**	14,1	5,1	0,0	3,3	3,3
Sud	5,6	**74,8**	8,8	2,4	0,0	3,2	5,2
Sud Isole	4,8	**65,9**	10,0	9,4	0,0	5,2	4,8
ITALIA	*3,0*	***77,4***	*9,1*	*4,3*	*0,0*	*2,9*	*3,3*
OCSE	*4,3*	***81,4***	*7,3*	*3,8*	*0,2*	*1,5*	*1,6*

La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta

Domanda 5

Nella figura seguente sono illustrati cinque circuiti:

Lungo quale di questi circuiti è stata guidata l'auto per produrre il grafico della velocità illustrato in precedenza?



L: Linea di partenza

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: B
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

655 (Livello 5 sulla scala complessiva di literacy in matematica). A questo livello lo studente deve mettere a punto e utilizzare modelli per situazioni complesse. Inoltre deve saper utilizzare la strategia appropriata per giungere alla soluzione del problema.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: rappresentazioni grafiche, interpretazione dei dati.
Abilità matematiche*:* capacità di leggere, interpretare e confrontare diverse rappresentazioni.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti.
- **Rappresentazione:** relativa al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici", in quanto viene richiesta la capacità di interpretare i risultati matematici in diversi formati e di saper raffrontare due o più rappresentazioni in relazione ad una situazione.
- **Ragionamento e argomentazione:** relativa al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica", in quanto è richiesta la capacità di analizzare e collegare gli elementi di un problema in modo da poterne trarre delle conclusioni.
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** relativa al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici", lo studente deve saper elaborare e mettere in atto una strategia finalizzata ad interpretare e valutare una soluzione matematica.

Analisi item

La domanda è del tipo "a risposta multipla". Tutti gli studenti appartenenti ai paesi dell'OCSE (in particolare gli italiani) hanno avuto enormi difficoltà nel rispondere a questo item. Gran parte di loro ha pensato che il circuito che riproducesse correttamente il grafico fosse un circuito che avesse la stessa forma del grafico, cosa ovviamente del tutto sbagliata.

Percentuali di risposte degli studenti
MATEMATICA - PISA 2000
M159Q05- VELOCITÀ DI UN'AUTO DA CORSA

	Risposta 1	***Risposta 2***	*Risposta 3*	*Risposta 4*	*Risposta 5*	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	28,0	**16,1**	6,1	4,2	39,3	0,0	4,9	1,4
Nord Est	23,1	**24,0**	8,0	4,9	34,7	0,0	3,0	2,3
Centro	22,8	**15,4**	3,8	3,4	45,3	0,0	5,5	3,8
Sud	21,7	**9,8**	3,1	2,7	46,0	0,0	10,4	6,3
Sud Isole	16,8	**11,3**	3,6	1,9	54,4	0,0	7,1	4,9
ITALIA	*22,7*	***14,6***	*4,7*	*3,4*	*44,3*	*0,0*	*6,5*	*3,8*
OCSE	*16,6*	***28,1***	*7,6*	*5,2*	*36,8*	*0,3*	*3,7*	*1,8*

La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta

IDEA CHIAVE: Incertezza e dati

1. RIFIUTI

Stimolo

Nell'ambito di una ricerca sull'ambiente, gli studenti hanno raccolto informazioni sui tempi di decomposizione di diversi tipi di rifiuti che la gente butta via:

Tipo di rifiuto	Tempo di decomposizione
Buccia di banana	1–3 anni
Buccia d'arancia	1–3 anni
Scatole di cartone	0,5 anni
Gomma da masticare	20–25 anni
Giornali	Pochi giorni
Bicchieri di plastica	Oltre 100 anni

Descrizione e contesto:

Il contesto potrebbe essere quello **scientifico** ma anche **sociale**. Infatti lo stimolo si riferisce all'analisi di dati tratti da situazione sociale ma fa riferimento anche ad aspetti tecnici specifici.

Domanda 1

Uno studente prevede di presentare i risultati con un diagramma a colonne. Scrivi un motivo per cui un diagramma a colonne non è adatto per rappresentare questi dati.

Codici di risposta

Punteggio pieno

Codice 1: Fornisce un motivo che si fonda sulla grande variazione dei dati.
La differenza tra le altezze delle colonne del diagramma sarebbe troppo grande.
Se si fa una colonna con un'altezza di 10 centimetri per la plastica, quella per le scatole di cartone sarà di 0,05 centimetri.

OPPURE Fornisce un motivo che si fonda sulla variabilità dei dati per alcune categorie.
L'altezza della colonna per "bicchieri di plastica" è indeterminata.
Non si può fare una colonna per 1-3 anni e una colonna per 20-25 anni.

Nessun punteggio

Codice 0: Altre risposte
Perché non funzionerà.
Un pittogramma è meglio.
Non si possono verificare le informazioni.
Perché i numeri nella tabella sono solo approssimazioni.

Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà

Il quesito viene classificato di livello 4 sulla scala complessiva di literacy in matematica. Si tratta, infatti, di un quesito abbastanza complesso per vari motivi, soprattutto linguistico-espressivi. Lo studente, infatti, per poter rispondere in maniera corretta,
1) deve saper discriminare tra le varie rappresentazioni grafiche
2) deve essere in grado di esprimere una discriminante che spinga a non usare la rappresentazione a colonne

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Grafici statistici, dati e percentuali.
Abilità matematiche*:* Il quesito richiede di rappresentare un grafico a partire dalle informazioni fornite. Richiede, inoltre, competenze interdisciplinari, come, ad esempio, competenze linguistiche espressivo-verbali.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**, relativamente al solo processo di "formulazione in forma matematica" (è richiesta la capacità di trasferire in forma grafica i dati forniti nello stimolo);
- **Rappresentazione:** relativamente al solo processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti" (è il processo più evidentemente coinvolto perché viene richiesto di rappresentare dati);
- **Ragionamento e Argomentazione,** relativamente al processo di "Spiegare, difendere o giustificare il processo e i procedimenti usati per determinare un risultato o una soluzione di natura matematica" (lo studente deve infatti argomentare la scelta della rappresentazione grafica più appropriata rispetto alla rappresentazione a colonne)
- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni,** relativamente al processo di "utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve comprendere e utilizzare costrutti formali basati su definizioni, regole e sistemi formali) e relativamente al processo di "interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve comprendere la relazione esistente tra il contesto del problema e la rappresentazione della soluzione matematica; deve usare tale comprensione per orientare l'interpretazione della soluzione nel contesto e determinarne la plausibilità e le possibili limitazioni).

Analisi item

Lo stimolo fa riferimento ad una problematica di grande attualità, quale è il tempo (espresso in anni) di decomposizione di rifiuti molto comuni.
Vengono riportati alcuni dati che lo studente deve rappresentare con un diagramma a colonne.
Viene, inoltre, richiesto di dare una motivazione al perché un diagramma a colonne potrebbe essere poco consono a rappresentare la situazione evidenziata nello stimolo.
La parte iniziale del quesito presenta un breve testo seguito da un grafico.
La domanda è a **risposta aperta articolata**. Si tratta di una domanda che richiede delle conoscenze indirette. Infatti non viene chiesto, come solitamente accade, di leggere e analizzare un grafico ma, al contrario di rappresentare graficamente dei dati. Inoltre, la domanda richiede una certa padronanza dei diversi tipi di rappresentazione di dati in quanto viene chiesto di spiegare un motivo per cui la rappresentazione a colonne non è indicata a rappresentare i dati riportati nello stimolo. Per rispondere adeguatamente lo studente deve rendersi conto che la differenza tra le altezze delle colonne del diagramma sarebbe troppo grande.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M505Q01 - Rifiuti

	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	27,9	**51,7**	0,0	18,7	1,7
Nord Est	29,8	**46,2**	0,0	22,3	1,6
Centro	30,0	**31,9**	0,0	34,7	3,4
Sud	25,3	**29,6**	0,0	39,2	5,8
Sud Isole	19,3	**17,6**	0,0	57,9	5,2
ITALIA	*26,2*	***34,9***	*0,0*	*26,2*	*3,7*
OCSE	*31,4*	***50,5***	*16,1*		*2,1*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Dalle percentuali presenti nella tabella qui sopra si evidenzia il livello di complessità abbastanza elevato di questo item. Infatti solo il 50,5% degli studenti OCSE risponde correttamente. In Italia la situazione è peggiore (appena il 34,9% degli studenti risponde correttamente) e al Sud Italia la situazione è davvero allarmante in quanto solo il 29,6% risponde correttamente, nelle isole addirittura il 17,6%. Trattandosi di una domanda a risposta aperta, non influenzano i dati neppure risposte date casualmente. E' preoccupante il fatto che molti studenti omettano risposte a domande in cui viene richiesta una giustificazione, come questa.

Dall'analisi dei risultati e delle risposte ai seguenti items, emerge che gli studenti italiani, e in particolare quelli del Sud Italia, non sono abituati a rispondere in maniera aperta a quesiti di matematica e incontrano difficoltà quando il quesito riguarda la lettura e l'interpretazione di dati statistici e la loro conversione in un diverso registro semiotico. Sarebbe auspicabile realizzare quesiti simili a questo analizzato (per analizzare in maniera più diretta i processi cognitivi coinvolti per ottenere un risultato matematicamente accettabile). E' auspicabile la scelta di contesti più vicino ad uno studente adolescente, per comprendere meglio se il contesto influisce sulle risposte degli studenti e fino a che punto.

2. TERREMOTI

Stimolo

E' stato trasmesso un documentario sui terremoti e sulla frequenza con cui si verificano. Tale documentario comprendeva un dibattito sulla prevedibilità dei terremoti.

Descrizione e contesto:

Il contesto potrebbe essere quello **scientifico**. Infatti il quesito riguarda un contesto più astratto che richiede la comprensione di alcuni fenomeni naturali. Lo stimolo presenta un breve testo che introduce gli items a risposta multipla successivi.

Domanda 1

Quale delle seguenti affermazioni esprime meglio il significato di ciò che ha detto il geologo?

A. Dato che $\frac{2}{3} \times 20 = 13{,}3$, tra il 13° e il 14° anno da oggi ci sarà un terremoto a Zedopoli.
B. $\frac{2}{3}$ è maggiore di $\frac{1}{2}$, pertanto ci sarà senza dubbio un terremoto a Zedopoli durante i prossimi 20 anni.
C. La probabilità che a Zedopoli vi sia un terremoto durante i prossimi 20 anni è maggiore della probabilità che non vi siano terremoti.
D. E' impossibile dire che cosa accadrà, perché nessuno può essere certo di quando si verificherà un terremoto.

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: C - La probabilità che a Zedopoli vi sia un terremoto durante i prossimi 20 anni è maggiore della probabilità che non vi siano terremoti.
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà

Il quesito è di livello 4 sulla scala complessiva di literacy in matematica. In realtà, non essendo richieste specifiche conoscenze, potrebbe essere considerato di livello 3.
Si tratta, infatti, di un quesito abbastanza semplice per vari motivi:
1) bisogna conoscere i concetti di evento e del suo complementare;
2) l'ultimo distrattore non richiedendo abilità matematiche, potrebbe essere scartato aprioristicamente;

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Probabilità, evento certo, evento complementare, frazioni e percentuali.
Abilità matematiche*:* Il quesito richiede la conoscenza dei primi elementi di calcolo delle probabilità. Deve riconoscere che un dato probabilistico può essere espresso attraverso una frazione e che il suo complemento a 1 è la probabilità del non verificarsi dello stesso evento.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**: relativamente al solo processo di "formulazione in forma matematica" (in quanto allo studente è richiesto di leggere, decodificare e interpretare dati al fine di creare un modello mentale della situazione);
- **Rappresentazione:** relativamente al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve dare un senso, mettere in relazione e usare una molteplicità di rappresentazioni nell'interazione con il problema)
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** relativamente al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica" (lo studente deve Selezionare o elaborare un piano o una strategia per inquadrare il problema contestualizzato in forma matematica), al processo di Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici (lo studente deve attivare meccanismi di controllo efficaci nel corso delle varie fasi del procedimento che porta alla soluzione) e al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve elaborare e mettere in atto una strategia finalizzata a interpretare, valutare e convalidare una soluzione matematica a un problema contestualizzato);
- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni,** relativamente al solo processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve saper calcolare la percentuale di un dato valore).

Analisi item

Si tratta di una domanda a risposta multipla, a cui lo studente non deve rispondere ricorrendo a specifiche formule. Più che competenze matematiche relative alla categoria di contesto incertezza e dati, sembra siano coinvolte competenze lessicali semantico-sintattiche e solo marginalmente la conoscenza di un argomento matematico specifico (è necessario che lo studente sappia che se la probabilità che un evento si verifichi è 2/3, la probabilità che lo stesso evento non si verifichi è 1-2/3).

I primi due distrattori, pur avendo una certa valenza epistemologica, possono essere esclusi in base a semplici ragionamenti. Il quarto distrattore è insidioso perché si riferisce ad una evidenza di senso comune.

MATEMATICA - PISA 2003

M509Q01 - Terremoti

	Risposta 1	*Risposta 2*	***Risposta3***	*Risposta 4*	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	9,8	7,4	**53,6**	17,7	1,3	7,0	3,2
Nord Est	8,2	9,3	**50,3**	21,4	1,6	5,0	4,1
Centro	8,7	13,4	**45,5**	18,8	0,7	7,4	5,7
Sud	9,9	9,3	**39,1**	20,1	0,5	11,5	9,6
Sud Isole	11,0	8,6	**27,0**	32,3	0,4	11,5	9,2
ITALIA	*9,6*	*9,5*	***42,6***	*22,1*	*0,8*	*8,8*	*6,6*
OCSE	*9,5*	*11,9*	***44,8***	*21,2*	*9,0*		*3,7*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

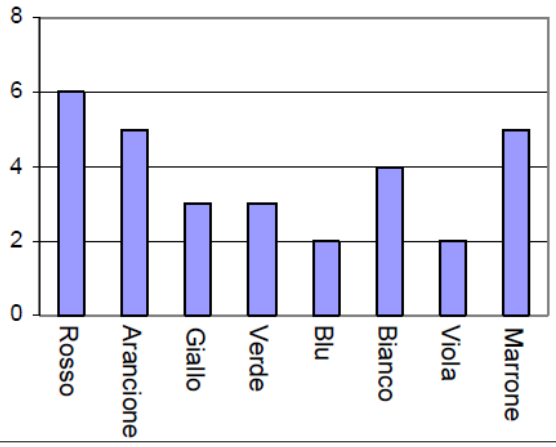
Dalle percentuali presenti nella tabella riportata, pur non trattandosi di un quesito molto complesso, la percentuale delle risposte corrette è molto basso. Infatti il 44,8% degli studenti OCSE risponde correttamente e solo il 9,0% non risponde. In Italia la situazione non è molto dissimile (il 42,6% degli studenti risponde correttamente e l'8,8% non risponde). Al Sud Italia la situazione è peggiore rispetto alla media nazionale (il 39,1% risponde correttamente). La percentuale degli studenti del Sud Itala che non risponde a questa domanda è il 11,5%. Da notare che il distrattore, che ad una prima lettura sembra ovvio scartare, è stato scelto dal 21,2% degli studenti OCSE, questo a conferma che spesso gli studenti usano il senso comune per rispondere a un test piuttosto che conoscenze disciplinari.

Dall'analisi dei risultati e delle risposte ai seguenti items, emerge che gli studenti si lasciano condizionare da conoscenze derivanti dal senso comune piuttosto che basarsi sulla concettualizzazione. Un dato da notare, relativamente al quesito è che la percentuale degli studenti OCSE che da' una risposta corretta non si discosta molto dalla percentuale degli studenti italiani né da quella degli studenti del sud Italia. Sarebbe auspicabile realizzare quesiti simili ai precedenti magari non riguardanti un argomento così specifico come i terremoti, ma riguardanti un contesto più vicino ad uno studente adolescente, per comprendere meglio se il contesto influisce sulle risposte degli studenti e fino a che punto.

3. CARAMELLE COLORATE

Stimolo

La mamma permette a Roberto di prendere una caramella da un sacchetto. Roberto non può vedere le caramelle. Il seguente grafico mostra il numero di caramelle di ciascun colore che ci sono nel sacchetto.



Descrizione e contesto:

Il contesto potrebbe essere quello **personale**. Infatti il quesito riguarda la persona stessa, la famiglia o un gruppo di pari.

La parte iniziale del quesito presenta un breve testo seguito da un grafico.

- Dal testo si evince che *Roberto* dovrà pescare alcune caramelle colorate da un sacchetto, senza vedere all'interno e che il grafico che segue mostrerà il numero di caramelle di ciascun colore presenti nel sacchetto.
- Il grafico è un ortogramma che presenta sull'asse orizzontale 8 colori (Rosso, Arancione, Giallo, Verde, Blu, Bianco, Viola, Marrone), ossia i colori delle caramelle (ma quest'ultima informazione si evince dal testo e non dal grafico, che è privo di titolo, di etichette riferite a ciascun asse e di legenda) e sull'asse verticale le frequenze assolute che vanno da 0 a 8 con incremento di 2. Dall'ortogramma emerge che la caramella più frequente è quella rossa mentre quelle meno frequenti sono quella verde e quella viola.

Domanda 1

Qual è la probabilità che Roberto prenda una caramella di colore rosso?

A. 10%
B. 20%
C. 25%
D. 50%

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: B - 20%
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà

Il quesito è di livello 4 sulla scala complessiva di literacy in matematica. Si tratta, infatti, di un quesito abbastanza complesso per vari motivi. Lo studente, infatti, per poter rispondere in maniera corretta,
1) deve conoscere il concetto di probabilità classica e saperla calcolare
2) deve saper estrarre informazioni dal grafico, elaborarle per ottenere risultati intermedi;
3) deve conoscere il concetto di percentuale e saper passare da numero decimale a percentuale.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Grafici statistici (ortogramma), calcolo delle probabilità (probabilità classica) e percentuali.
Abilità matematiche*:* Il quesito richiede di estrarre informazioni dal grafico, elaborarle per ottenere risultati intermedi, saper calcolare la probabilità classica e passare da un numero decimale ad una percentuale.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**, relativamente al solo processo di "formulazione in forma matematica" (è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti nei grafici);
- **Rappresentazione:** relativamente al solo processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti" (è richiesto di dare un senso, mettere in relazione e usare una molteplicità di rappresentazioni nell'interazione con il problema);
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi,** relativamente al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica" (lo studente deve selezionare o elaborare un piano o una strategia per inquadrare il problema contestualizzato in forma matematica) e al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve attivare meccanismi di controllo efficaci nel corso delle varie fasi del procedimento che portano alla soluzione);
- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni,** relativamente al processo di "utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve comprendere e utilizzare costrutti formali basati su definizioni, regole e sistemi formali) e relativamente al processo di "interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve comprendere la relazione esistente tra il contesto del problema e la rappresentazione della soluzione matematica; deve usare tale comprensione per orientare l'interpretazione della soluzione nel contesto e determinarne la plausibilità e le possibili limitazioni).

Analisi item

Si tratta di una domanda a risposta multipla. Per rispondere lo studente deve conoscere il concetto di probabilità classica, ossia sapere che la probabilità classica che si verifichi un evento è il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili. Deve saper passare, inoltre, da numero decimale a percentuale. Per rispondere dovrà, innanzitutto, leggere dal grafico le frequenze assolute e dovrà calcolare tutti i casi possibili, sommando tutte le frequenze assolute. Successivamente dovrà individuare i casi favorevoli, leggendo dal grafico in corrispondenza della barra "*Rosso"* e dovrà calcolare il rapporto tra i casi favorevoli (6) e i casi possibili (30) e ottenere, così, la probabilità che si verifichi l'evento di estrarre la caramella rossa come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili (6/30, ossia 1/5, ossia 0,2). Infine dovrà passare alla percentuale, moltiplicando la probabilità ottenuta (0,2) per 100.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA - PISA 2003

M467Q01 - Caramelle colorate

	Risposta 1	***Risposta 2***	*Risposta 3*	*Risposta 4*	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	7,9	**41,9**	25,8	22,2	0,4	1,3	0,5
Nord Est	9,2	**44,1**	25,3	18,0	0,1	2,0	1,3
Centro	9,2	**35,4**	22,8	27,9	0,1	4,3	0,3
Sud	8,6	**23,9**	27,9	34,4	0,3	3,5	1,3
Sud Isole	9,0	**27,1**	25,6	31,2	0,7	4,0	2,3
ITALIA	*8,7*	***33,7***	*25,6*	*27,4*	*0,3*	*3,1*	*1,1*
OCSE	*9,1*	***49,7***	*20,9*	*17,4*	*0,0*	*1,8*	*1,0*

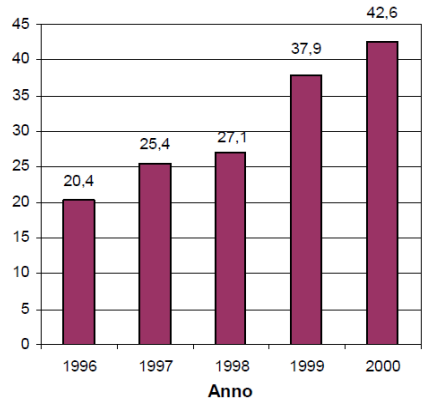
* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Dalle percentuali presenti nella tabella qui sopra si evidenzia il livello di complessità abbastanza elevato di questo item. Infatti solo il 49,7% degli studenti OCSE risponde correttamente. In Italia la situazione è peggiore (appena il 33,7% degli studenti risponde correttamente) e al Sud Italia la situazione è davvero allarmante in quanto solo il 23,9% risponde correttamente. Trattandosi di una domanda a risposta multipla senza giustificazione, nella percentuale della risposte esatte rientra anche la risposta di qualche studente che ha risposto correttamente, ma in maniera casuale.
Dall'analisi delle risposte e dei risultati emerge che gli studenti italiani, e in particolare quelli del Sud Italia, hanno poche conoscenze sul calcolo delle probabilità e sulle percentuali, argomenti spesso trascurati nei curriculi scolastici, e vanno in difficoltà quando devono rispondere a quesiti che richiedono contemporaneamente più competenze per la risoluzione (lettura di informazioni da un grafico statistico ed elaborazione di queste informazioni). Sarebbe auspicabile realizzare quesiti simili a questo, con informazioni contenute in un grafico, ma a risposta aperta e con motivazione (per comprendere meglio il ragionamento dello studente e il processo cognitivo che mette in atto per raggiungere la soluzione), magari non riguardanti l'estrazione di caramelle da un sacchetto, ma un contesto più vicino ad uno studente adolescente, per comprendere meglio se il contesto influisce sulle risposte degli studenti e fino a che punto.

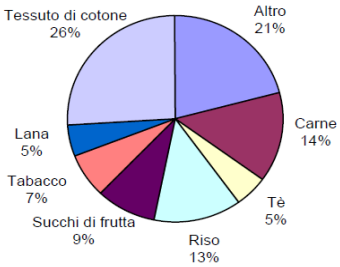
4. ESPORTAZIONI

Stimolo

Totale delle esportazioni annue della Zedlandia in milioni di zed, 1996-2000



Distribuzione delle esportazioni della Zedlandia nel 2000



I seguenti grafici forniscono alcune informazioni sulle esportazioni della Zedlandia, un Paese in cui si usa lo zed come moneta corrente.

Descrizione e contesto:

Il contesto potrebbe essere quello **sociale**. Infatti il quesito riguarda statistiche ed economie nazionali, riferite al Paese della Zedlandia.

Il quesito presenta due grafici, un ortogramma e un areogramma, e un breve testo che spiega in modo chiaro che i due grafici si riferiscono a dati riguardanti un Paese, la Zedlandia, nel quale la moneta corrente si chiama zed.
L'ortogramma presenta i dati relativi alle esportazioni annue della Zedlandia in milioni di zed, in riferimento al periodo che va dal 1996 al 2000. Sull'asse orizzontale ci sono gli anni di riferimento (1996, 1997, 1998, 1999 e 2000) e sull'asse verticale ci sono i valori riferiti al totale delle esportazioni, da 0 a 45 milioni di zed (il fatto che si tratti di milioni di zed è un'informazione che deve essere ricavata dal titolo del grafico). Sopra ogni barra (riferita a ciascun anno) c'è il relativo valore delle esportazioni. Dunque, il valore delle esportazioni, riferito a ciascun anno, può essere dedotto leggendo l'asse verticale in riferimento a ciascun anno o, più semplicemente e con maggiore precisione, leggendo il valore sopra ciascuna barra. La presenza del valore sopra ciascuna barra, quindi, semplifica notevolmente la lettura del grafico.
L'areogramma presenta la distribuzione delle esportazioni della Zedlandia nell'anno 2000 (questa informazione deve essere ricavata dal titolo del grafico) ed è costituito da 8 settori circolari che si riferiscono ai prodotti esportati dal Paese in quell'anno (carne, tè, riso, succhi di frutta, tabacco, lana, tessuto di cotone, altro). Dall'areogramma emerge che il prodotto più esportato nel 2000 è stato il tessuto di cotone (26%), a seguire altro (21%) e carne (14%). I due grafici hanno in comune l'anno 2000, nel senso che dal primo grafico si può evincere, tra le altre cose, il totale delle esportazioni nel 2000 (42.6 milioni di zed) e nel secondo grafico si evince come questo totale si distribuisce tra i vari prodotti esportati.

Domanda 1

Qual è stato l'ammontare totale (in milioni di zed) delle esportazioni della Zedlandia nel 1998?
Risposta: ……..

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: 27,1 milioni di zed o 27.100.000 zed o 27,1 (l'unità di misura non è richiesta).
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà dell'item

Il quesito è di livello 2 sulla scala complessiva di literacy in matematica. Si tratta, infatti, di un quesito abbastanza semplice per vari motivi:
1) bisogna acquisire informazioni solo dal primo grafico e, dunque, la vera difficoltà dello studente è quella di individuare nel secondo grafico il distrattore;
2) nel primo grafico, la presenza del valore delle esportazioni sopra ciascuna barra ne semplifica notevolmente la lettura;
3) non è richiesto di precisare l'unità di misura e, dunque, lo studente semplicemente il valore letto dal grafico.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Grafici statistici: ortogramma e areogramma.
Abilità matematiche*:* Il quesito richiede una lettura diretta dei dati del primo grafico. Lo studente deve orientarsi verso le informazioni fornite, identificare in quale grafico è presente l'informazione richiesta, leggere l'informazione dal grafico e riportarla.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**, relativamente al processo di "formulazione in forma matematica" (è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti nei grafici) e di "utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (è richiesto di articolare una soluzione e di presentare il risultato);
- **Rappresentazione:** relativamente al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti" (è richiesto di dare un senso, mettere in relazione e usare una molteplicità di rappresentazioni nell'interazione con il problema) e al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve confrontare o valutare due o più rappresentazioni in relazione ad una situazione);
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi,** relativamente al solo processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica" (lo studente deve selezionare o elaborare un piano o una strategia per inquadrare il problema contestualizzato in forma matematica);

Analisi item

Si tratta di una domanda aperta univoca, nel senso che lo studente deve riportare un valore numerico senza precisare calcoli o ragionamenti che lo hanno portato ad ottenere la risposta. Lo studente, per rispondere a questa domanda, deve capire che il secondo grafico è un distrattore, in quanto fa riferimento soltanto alle esportazioni avvenute nel 2000 e che la risposta è da ricercarsi solo nel primo grafico. A questo punto deve prendere in considerazione la barra dell'ortogramma riferita al 1998, leggere il valore nella parte superiore della barra e riportarlo. Allo studente non è richiesto di precisare l'unità di misura. Può scrivere anche soltanto 27,1 senza evidenziare che si tratti di milioni di zed. Se la domanda fosse stata posta in modo da richiedere allo studente di precisare l'unità di misura per avere un punteggio pieno, allora sarebbe stata più complicata e avrebbe richiesto una competenza maggiore. Lo studente, infatti, avrebbe dovuto leggere attentamente il testo e il titolo del primo grafico, avere ben chiaro il fatto che nel grafico i numeri corrispondano a milioni di zed e riportare questa informazione.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M438Q01- Esportazioni

	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	12,0	**75,8**	0,0	9,5	2,7
Nord Est	13,1	**76,2**	0,0	7,7	3,0
Centro	9,0	**66,4**	0,0	20,7	3,9
Sud	11,5	**56,5**	0,0	23,4	8,7
Sud Isole	17,9	**49,8**	0,0	25,3	7,0
ITALIA	*12,7*	***64,1***	*0,0*	*17,9*	*5,3*
OCSE	*13,4*	***76,5***	*0,0*	*7,3*	*2,8*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Dalle percentuali presenti nella tabella qui sopra si evidenzia il livello di complessità non elevato di questo item. Infatti il 76,5% degli studenti OCSE risponde correttamente e solo il 7,3% non risponde, In Italia la situazione è un po' diversa, ma comunque positiva, nel senso che il 64,1% degli studenti risponde correttamente e il 17,9% non risponde. Al Sud Italia la situazione è peggiore rispetto alla media nazionale (il 56,5% risponde correttamente). La percentuale

degli studenti del Sud Itala che non risponde a questa domanda è il 23,4%, ossia quasi un quarto degli studenti. Questo è un dato da non sottovalutare.

Domanda 2

Quale è stato l'ammontare delle esportazioni di succhi di frutta della Zedlandia nel 2000?

A. 1,8 milioni di zed
B. 2,3 milioni di zed
C. 2,4 milioni di zed
D. 3,4 milioni di zed
E. 3,8 milioni di zed

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: E - 3,8 milioni di zed.
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà

Il quesito è di livello 4 sulla scala complessiva di literacy in matematica. Si tratta, infatti, di un quesito abbastanza complesso in quanto bisogna acquisire informazioni da entrambi i grafici ed elaborarle per ottenere la risposta. L'item è semplificato dal fatto che si tratta di una domanda a risposta multipla. Il livello di difficoltà sarebbe stato più alto se l'item fosse stato a risposta aperta e con la richiesta di argomentazione.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Grafici statistici: ortogramma e areogramma, calcolo di percentuali.
Abilità matematiche: Il quesito richiede una lettura di dati sia dal primo che dal secondo grafico e un'elaborazione delle informazioni acquisite.

Capacità fondamentali e processi

- **Comunicazione**: relativamente al solo processo di "formulazione in forma matematica" (in quanto allo studente è richiesto di leggere, decodificare e interpretare dati al fine di creare un modello mentale della situazione);
- **Rappresentazione:** relativamente al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve dare un senso, mettere in relazione e usare una molteplicità di rappresentazioni nell'interazione con il problema) e al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve confrontare o valutare due o più rappresentazioni in relazione ad una situazione);
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** relativamente al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica" (lo studente deve Selezionare o elaborare un piano o una strategia per inquadrare il problema contestualizzato in forma matematica), al processo di Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici (lo studente deve attivare meccanismi di controllo efficaci nel corso delle varie fasi del procedimento che porta alla soluzione) e al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve elaborare e mettere in atto una strategia finalizzata a interpretare, valutare e convalidare una soluzione matematica a un problema contestualizzato);
- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni,** relativamente al solo processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve saper calcolare la percentuale di un dato valore).

Analisi item

Si tratta di una domanda a risposta multipla. Lo studente, per rispondere, deve acquisire informazioni da entrambi i grafici. In particolare, deve leggere dal primo grafico l'informazione relativa al totale delle esportazioni della Zedlandia nell'anno 2000, ossia 42,6 milioni di zed, leggere dal secondo grafico la percentuale relativa all'esportazione di succhi di frutta nel 2000, ossia il 9% e, infine, calcolare il 9% di 42,6 milioni di zed ottenendo come soluzione 3,8 milioni di zed.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M438Q02- Esportazioni

	Risposta 1	*Risposta 2*	*Risposta 3*	*Risposta 4*	***Risposta 5***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	9,4	8,8	17,9	8,7	**43,6**	0,1	8,4	3,1
Nord Est	7,6	11,1	14,7	5,4	**48,8**	0,0	9,2	3,2
Centro	7,9	10,8	17,5	8,0	**33,6**	0,1	17,7	4,3
Sud	14,2	9,6	8,9	8,6	**30,9**	0,0	19,0	8,7
Sud Isole	6,9	7,7	17,2	8,2	**31,7**	1,0	20,1	7,3
ITALIA	*9,5*	*9,5*	*15,1*	*8,0*	***37,1***	*0,2*	*15,2*	*5,5*
OCSE	*10,2*	*9,9*	*15,8*	*7,6*	***46,9***	*0,0*	*6,7*	*3,0*

* La colonna in grassetto corrisponde a 5/5 risposte corrette.

Dalle percentuali presenti in tabella si evidenzia il livello di complessità abbastanza elevato di questo item. Infatti solo il 46,9% degli studenti OCSE risponde correttamente. In Italia la situazione è peggiore, in quanto solo il 37,1% degli studenti italiani risponde correttamente e il 15,2% non risponde, nonostante si tratti di una domanda a risposta multipla. Al Sud Italia solo il 30,9% degli studenti risponde correttamente e, addirittura, il 19% degli studenti non risponde. È ipotizzabile una percentuale più bassa di risposte corrette di fronte alla stessa domanda a risposta aperta e una situazione ancora più critica di fronte alla richiesta di motivare e argomentare la propria risposta.
Dall'analisi dei risultati e delle risposte ai seguenti items, emerge che gli studenti italiani, e in particolare quelli del Sud Italia, non sono abituati a rispondere in maniera aperta a quesiti di matematica e vanno in difficoltà quando il quesito riguarda la lettura e l'interpretazione di grafici statistici e le informazioni sono presenti in grafici diversi. Sarebbe auspicabile realizzare quesiti simili ai precedenti (per comprendere meglio il ragionamento dello studente e il processo cognitivo che mette in atto per raggiungere la soluzione), magari non riguardanti le esportazioni di prodotti di un tale Paese, ma riguardanti un contesto più vicino ad uno studente adolescente, per comprendere meglio se il contesto influisce sulle risposte degli studenti e fino a che punto.

5. POPOLARITA' DEL PRESIDENTE

Stimolo

In Zedlandia sono stati effettuati alcuni sondaggi di opinione per determinare il livello di popolarità del Presidente in vista delle prossime elezioni. Quattro editori di giornali hanno svolto sondaggi indipendenti su scala nazionale. I risultati dei quattro sondaggi dei giornali sono i seguenti:

Giornale 1: 36,5% (sondaggio effettuato il 6 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),

Giornale 2: 41,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),

Giornale 3: 39,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 1.000 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),

Giornale 4: 44,5% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su 1.000 lettori che hanno telefonato alla redazione per votare).

Descrizione e contesto:

Il contesto potrebbe essere quello **sociale**. Infatti il quesito riguarda sondaggi di opinione riguardanti la popolarità del presidente della Zedlandia.
Il quesito è presentato interamente in maniera testuale. C'è una piccola introduzione che anticipa il fatto che in seguito verranno presentati i sondaggi svolti da quattro editori diversi. Segue l'elenco dei sondaggi dei quattro editori e, per ogni giornale (Giornale 1,2,3,4) vengono presentate:

- la percentuale (di popolarità del presidente della Zedlandia, ma questa informazione viene ricavata dal testo introduttivo);
- il giorno in cui è stato svolto il sondaggio;
- la dimensione del campione statistico utilizzato per il sondaggio;
- la modalità con la quale è stato scelto il campione.

Si osserva subito che 3 giornali su 4 (tutti tranne il Giornale 1) hanno svolto il sondaggio il 20 gennaio, mentre uno solo (il Giornale 1) lo ha svolto anticipatamente, il 6 gennaio. Inoltre si osserva che 2 giornali su 4 (Giornale 3 e Giornale 4) hanno utilizzato un campione più ampio (1000 persone), mentre gli altri 2 (Giornale 1 e Giornale 2) un campione più ristretto (500 persone). L'attenzione viene rivolta al fatto che il un solo giornale (il Giornale 4) ha scelto il campione in maniera diversa dagli altri 3. Infatti, mentre gli altri hanno scelto a caso le persone da intervistare tra i cittadini aventi diritto al voto, questo giornale ha intervistato suoi lettori che si sono proposti volontariamente per votare, e ciò fa pensare che potrebbero non necessariamente essere persone aventi diritto al voto.

Domanda 1

Quale giornale è più attendibile per prevedere il livello di popolarità del Presidente, se le elezioni si svolgono il 25 gennaio? Scrivi due motivi che giustifichino la tua risposta.

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 2: Giornale 3. Il sondaggio è più recente, con un campione più ampio, selezionato in modo casuale e composto di soli elettori aventi diritto di voto. (Fornisce almeno due motivi). Ignorare ulteriori informazioni (comprese informazioni irrilevanti o errate).
• Il giornale 3, perché hanno selezionato più cittadini in modo casuale con diritto di voto.
• Il giornale 3, perché ha chiesto a 1.000 persone, selezionate casualmente, e la data è più vicina alla data delle elezioni così i votanti hanno meno tempo per cambiare idea.
• Il giornale 3, perché sono stati selezionati casualmente e avevano diritto di voto.

• Il giornale 3, perché ha fatto un'indagine con più persone più vicina alla data delle elezioni.
• Il giornale 3 perché sono state selezionate casualmente 1.000 persone.
Punteggio parziale
Codice 1: Giornale 3, con un solo motivo o senza spiegazione.
• Il giornale 3, perché il sondaggio è più vicino alla data delle elezioni.
• Il giornale 3, perché ha fatto un'indagine con più persone rispetto ai giornali 1 e 2.
• Il giornale 3.
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
• Il giornale 4. Più persone significa risultati più precisi e quelli che hanno telefonato avranno riflettuto meglio sul proprio voto.
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà

Il quesito è di livello 5 sulla scala complessiva di literacy in matematica. Si tratta, infatti, di un quesito molto complesso, in quanto ci sono molte variabili in gioco. Lo studente dovrebbe

- avere, innanzitutto, un minimo di conoscenza sui sondaggi: come avvengono, come viene scelto il campione, ecc.;
- avere un minimo di conoscenza della politica: sondaggi politici, cittadini che hanno diritto al voto, ecc.;
- avere un minimo di conoscenza di statistica inferenziale: scelta del campione, numerosità del campione;
- avere sotto controllo diverse variabili: numero di partecipanti al sondaggio, data del sondaggio, …

A partire da questo lo studente dovrebbe riuscire ad individuare la risposta esatta e, cosa più complicata, dovrebbe spiegare il proprio ragionamento in forma scritta.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Conoscenze di base di **s**tatistica inferenziale, (campionamento), percentuali.
Abilità matematiche*:* Il quesito richiede una lettura approfondita della consegna e dei dati presenti nello stimolo, la capacità di individuare, a partire dalla conoscenze personali e dai dai a disposizione, la risposta corretta e la capacità di argomentare la propria risposta e il proprio ragionamento.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**, relativamente al processo di "formulazione in forma matematica" (è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti) e di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (è richiesto di elaborare e comunicare spiegazioni e argomentazioni nel contesto del problema);
- **Rappresentazione,** relativamente al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica" (lo studente deve/può creare una rappresentazione matematica delle informazioni del mondo reale), relativamente al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve dare un senso, mettere in relazione e usare una molteplicità di rappresentazioni nell'interazione con il problema) e "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve interpretare i risultati matematici in diversi formati in relazione alla situazione o all'utilizzo);
- **Ragionamento ed argomentazione,** relativamente al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica" (lo studente deve spiegare, difendere o giustificare la rappresentazione della situazione reale elaborata o individuata), al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (Collegare le informazioni per giungere a una soluzione matematica, elaborare generalizzazioni o creare argomentazioni a più livelli) e al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve riflettere sulle soluzioni matematiche ed elaborare spiegazioni e argomentazioni che supportino, confutino o qualifichino la soluzione a un problema contestualizzato);
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi,** relativamente al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica" (lo studente deve selezionare o elaborare un piano o una strategia per inquadrare il problema contestualizzato in forma matematica), al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve attivare meccanismi di controllo efficaci nel corso delle varie fasi del procedimento che porta alla soluzione) e al processo di "Interpretazione,

applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve elaborare e mettere in atto una strategia finalizzata a interpretare, valutare e convalidare la soluzione a un problema contestualizzato.

Analisi item

Si tratta di una domanda a risposta aperta articolata, nel senso che viene richiesto di spiegare e argomentare il proprio ragionamento. Lo studente, per rispondere a questa domanda, deve analizzare attentamente la consegna e i dati presenti nel quesito, capire che un sondaggio riguardante le elezioni è più attendibile se più recente e se coinvolge quante più persone scelte in maniera casuale e aventi diritto al voto. A partire da queste informazioni lo studente dovrebbe:

- scartare l'opzione Giornale 1, in quanto il sondaggio è stato effettuato prima rispetto agli altri giornali e, dunque, è meno recente;
- scartare l'opzione Giornale 2 perché il sondaggio è stato effettuato nella stessa data dei sondaggi del Giornale 3 e Giornale 4, ma ha coinvolto un numero inferiore di persone rispetto agli altri sondaggi;
- scartare l'opzione Giornale 4 perché, nonostante il sondaggio sia recente (stessa data di quello del Giornale 2 e Giornale 3) e abbia coinvolto il maggior numero di persone (stesso numero di persone del Giornale 4), è stato effettuato su elettori del giornale che, volontariamente, hanno deciso di parteciparvi telefonando alla redazione e, dunque, il campione non è stato scelto in maniera casuale e ha compreso, probabilmente, anche persone non aventi diritto al voto (cittadini di altra nazione, bambini, …);
- scegliere l'ultima opzione rimasta, ossia il Giornale 3 e giustificare in maniera scritta il proprio ragionamento, ossia descrivere i motivi che lo hanno spinto a scartare le altre opzioni.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M702Q01- Popolarità del Presidente

	Risposta 0	*Risposta 1*	***Risposta2***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	24,3	7,2	**47,2**	0,0	18,3	3,0
Nord Est	28,1	7,1	**43,1**	0,0	20,3	1,4
Centro	25,1	6,4	**38,9**	0,0	25,7	3,8
Sud	23,8	6,1	**28,6**	0,0	35,6	5,9
Sud Isole	23,2	3,8	**22,5**	0,0	43,8	6,6
ITALIA	*24,7*	*6,1*	***35,6***	*0,0*	*29,2*	*4,3*
OCSE	*33,8*	*7,2*	***34,7***	*21,6*		*2,7*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.
** La risposta 1 è parzialmente corretta.

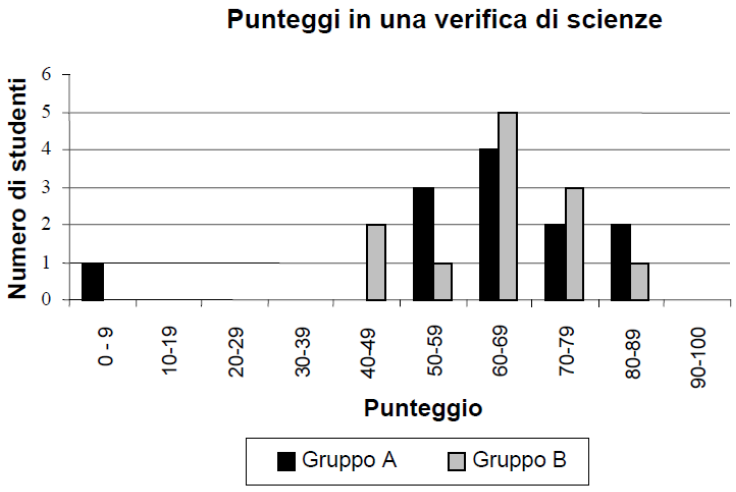
Dalle percentuali presenti nella tabella qui sopra si evidenzia il livello di complessità elevato di questo item. Infatti solo il 34,7% degli studenti OCSE risponde correttamente e solo il 7,2% risponde in maniera parzialmente corretta. In Italia, la situazione è migliore rispetto alla media OCSE. Infatti il 35,6% degli studenti risponde in maniera corretta. Questo è un dato sul quale porre attenzione.
Sarebbe auspicabile realizzare domande a risposta articolata che portino lo studente a ragionare e ad argomentare il proprio ragionamento. Sarebbe interessante presentare la stessa domanda con lo stesso livello di difficoltà ma riguardante un contesto più vicino allo studente, (magari un sondaggio riguardante l'elezione del rappresentante di classe) per capire se qualche difficoltà sia conseguenza di un contesto troppo lontano dal suo contesto. Sarebbe, inoltre, utile immaginare lo stesso quesito (o quesiti simili a questo) con dati non presenti sotto forma d testo ma che devono essere estrapolati da alcuni grafici statistici.

6. RISULTATI DI UNA VERIFICA

Stimolo

Il grafico seguente mostra i risultati di una verifica di scienze, ottenuti da due gruppi di studenti, indicati come Gruppo A e Gruppo B.

Il punteggio medio del Gruppo A è 62,0 e quello del Gruppo B è 64,5. Per avere la sufficienza, gli studenti devono ottenere almeno 50 punti.



Contesto:

Il contesto potrebbe essere quello **sociale**. Infatti il quesito riguarda il punteggio ottenuto da due gruppi di studenti in una verifica.

Domanda

In base a questo grafico, l'insegnante sostiene che, nella verifica, il Gruppo B è andato meglio del Gruppo A.
Gli studenti del Gruppo A non sono d'accordo con l'insegnante. Essi cercano di convincere l'insegnante che il Gruppo B non è necessariamente andato meglio.
Con l'aiuto del grafico, suggerisci agli studenti del Gruppo A una spiegazione matematica che potrebbero usare.

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: Suggerisce una spiegazione valida. Spiegazioni valide potrebbero riguardare il numero di studenti che hanno superato la verifica, l'influenza negativa sulla media dell'unico studente che va molto male, oppure il numero di studenti con punteggi molto alti. :
• Più studenti del Gruppo A hanno superato la verifica rispetto a quelli del Gruppo B.
• Se si ignorano gli studenti meno bravi del Gruppo A, gli studenti del Gruppo A vanno meglio di quelli del Gruppo B.
• Più studenti del Gruppo A rispetto agli studenti del Gruppo B hanno ottenuto un punteggio di 80 o superiore.
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte, comprese risposte prive di spiegazione matematica o con spiegazioni matematiche errate, oppure risposte che descrivono semplicemente alcune differenze ma non sono argomenti validi da giustificare che il Gruppo B potrebbe non essere andato meglio.
• Normalmente gli studenti del gruppo A vanno meglio degli studenti del Gruppo B in scienze. I risultati di questa verifica sono solo una coincidenza.
• Perché la differenza tra i punteggi più alti e quelli più bassi è minore per il gruppo B rispetto al Gruppo A.

• Il Gruppo A ha migliori risultati nell'intervallo di punteggio 80-89 e in quello 50-59.
• Il Gruppo A ha un maggiore intervallo interquartile rispetto al Gruppo B.
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà

Il quesito è di livello 5 sulla scala complessiva di literacy in matematica. Si tratta, infatti, di un quesito molto complesso, per vari motivi:
1) non vi è un'unica risposta esatta ma potrebbero esserci varie giustificazioni esatte; dunque c'è la necessità da parte dello studente di individuare una possibile strategia corretta ragionando sui dati a disposizione e sull'obiettivo da raggiungere;
2) lo studente, oltre ad individuare una corretta strategia, deve riuscire a spiegarla scrivendo la propria motivazione; questa operazione potrebbe essere molto complicata, soprattutto per lo studente che non è abituato ad argomentare.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Grafici statistici: ortogramma, media aritmetica.
Abilità matematiche*:* Il quesito richiede una lettura dei dati presenti nel grafico, un'analisi approfondita degli stessi, una elaborazione di una strategia e un'esposizione scritta della propria strategia.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**, relativamente al processo di "formulazione in forma matematica" (è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti nel grafico) e di "utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (è richiesto di articolare una soluzione e di presentare il risultato);
- **Rappresentazione:** relativamente al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti" (è richiesto di dare un senso, mettere in relazione e usare una molteplicità di rappresentazioni nell'interazione con il problema), al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve confrontare o valutare due o più rappresentazioni in relazione ad una situazione) e al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve elaborare e comunicare spiegazioni e argomentazioni nel contesto del problema);
- **Rappresentazione,** relativamente al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve interpretare i risultati matematici in diversi formati in relazione alla situazione o all'utilizzo, confrontare o valutare due o più rappresentazioni in relazione a una situazione);
- **Ragionamento ed argomentazione,** relativamente al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica" (lo studente deve spiegare, difendere o giustificare la rappresentazione della situazione reale elaborata o individuata), al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve Spiegare, difendere o giustificare il processo e i procedimenti usati per determinare un risultato o una soluzione di natura matematica, collegare le informazioni per giungere a una soluzione matematica, elaborare generalizzazioni o creare argomentazioni a più livelli) e al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve riflettere sulle soluzioni matematiche ed elaborare spiegazioni e argomentazioni che supportino, confutino o qualifichino la soluzione a un problema contestualizzato);
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi,** relativamente al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica" (lo studente deve selezionare o elaborare un piano o una strategia per inquadrare il problema contestualizzato in forma matematica), al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve attivare meccanismi di controllo efficaci nel corso delle varie fasi del procedimento che porta alla soluzione) e al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve elaborare e mettere in atto una strategia finalizzata a interpretare, valutare e convalidare la soluzione a un problema contestualizzato.

Analisi item

Si tratta di una domanda a risposta aperta articolata, nel senso che viene richiesto di spiegare e argomentare il proprio ragionamento. Lo studente, per rispondere a questa domanda, deve analizzare attentamente il grafico e deve cercare una corretta strategia per poter giustificare la il fatto che il gruppo B non sia andato necessariamente meglio del gruppo A. Deve, inoltre, riuscire a trovare le giuste parole per poter spiegare la propria strategia. Potrebbe trovare varie giustificazioni. Alcune giuste motivazioni potrebbero essere le seguenti:

1. potrebbe far osservare che il numero di studenti che hanno superato la verifica (punteggio di almeno 50 punti) nel gruppo A è maggiore rispetto a quello del gruppo B. Infatti, nel gruppo B, 10 studenti hanno superato la verifica, mentre nel gruppo A gli studenti sono 11;
2. potrebbe far osservare che la media del gruppo A è fortemente abbassata da un unico studente che ha ottenuto un punteggio molo basso; se non si considerasse tale studente la media del gruppo A sarebbe maggiore di quella del gruppo B; lo studente potrebbe, magari, calcolare la media del gruppo A senza considerare lo studente con punteggio molto basso;
3. potrebbe fa notare che il punteggio più alto (80-89 punti) è stato raggiunto da 2 studenti del gruppo A, mentre solo uno studente del gruppo B ha ottenuto tale punteggio; dunque, potrebbe far osservare che i "più bravi" sono gli studenti del gruppo A.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M513Q1 - Risultati di una verifica

	Risposta 0	***Risposta 1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	24,9	**28,3**	0,0	44,0	2,7
Nord Est	28,6	**23,5**	0,0	45,3	2,6
Centro	30,6	**14,7**	0,0	50,8	3,8
Sud	22,8	**8,8**	0,0	60,2	8,2
Sud Isole	19,5	**4,3**	0,0	69,4	6,8
ITALIA	*24,9*	***15,3***	*0,0*	*54,7*	*5,1*
OCSE	*31,9*	***31,3***	*34,0*		*2,7*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Dalle percentuali presenti nella tabella qui sopra si evidenzia il livello di complessità elevato di questo item. Infatti solo il 31,3% degli studenti OCSE risponde correttamente. In Italia, la percentuale degli studenti che risponde correttamente è bassissima, nel senso che solo il 15,3% degli studenti risponde correttamente e, addirittura, il 54,7% non risponde. Al Sud Italia la situazione è preoccupante (solo l'8,8% degli studenti risponde correttamente e il 60,2% non risponde). Questi dati testimoniano il fatto che gli studenti italiani, e in particolare quelli del Sud Italia, non sono abituati a rispondere a domande a risposta aperta articolata, nel senso che non sono abituati ad argomentare risposte in ambito matematico.

Dai risultati relativi a questo quesito emerge che gli studenti OCSE e, in particolare quelli Italiani e del Sud Italia, trovano difficoltà quando si trovano di fronte a domande che richiedono un'argomentazione della risposta e quando la risposta non è unica, ma possono esistere più risposte giuste e, dunque, più argomentazioni giuste. Sarebbe

auspicabile, pertanto, realizzare domande simili a questa, che richiedono la motivazione della risposta e riguardanti un contesto vicino a quello dello studente.

7. VERIFICA DI SCIENZE

Stimolo

Nella scuola di Martina, l'insegnante di scienze fa delle verifiche nelle quali il punteggio massimo è 100. Martina ha un punteggio medio di 60 nelle sue prime quattro verifiche di scienze. Alla quinta verifica, prende 80.

Descrizione e contesto:

Il contesto potrebbe essere quello **personale**. Infatti il quesito riguarda il punteggio raggiunto da Martina nelle varie verifiche di scienze. Potrebbe essere anche quello **sociale,** in quanto riguarda il risultato di una verifica che probabilmente è stata sostenuta da un gruppo di studenti.
Il quesito è presentato interamente in maniera testuale. Si parla di media aritmetica e della possibilità di aggiungere un nuovo dato ad una media già calcolata. Lo stimolo è molto breve e questo potrebbe essere di aiuto allo studente che non deve leggere molte informazioni e può riuscire in pochi istanti a focalizzarsi sulla questione.

Domanda

Qual è la media dei punteggi in scienze di Martina dopo tutte e cinque le verifiche?
Media: ……..

Codici di risposta

Punteggio pieno
Codice 1: 64
Nessun punteggio
Codice 0: Altre risposte
Codice 9: Non risponde

Livello di difficoltà

Il quesito è di livello 4 sulla scala complessiva di literacy in matematica. Si tratta, infatti, di un quesito abbastanza complesso, per vari motivi:
1) richiede la conoscenza del concetto di media aritmetica e dell'algoritmo per calcolarla;
2) richiede l'abilità di calcolare la media a partire da una media già assegnata che riguarda *n* dati, con l'aggiunta di un nuovo dato.
Il saper calcolare la media aritmetica di dati assegnati è un'abilità che gli studenti sicuramente possiedono in alta percentuale, ma la capacità di aggiungere un nuovo dato ad una media già assegnata non è affatto una capacità scontata e rende il quesito per niente banale. Il contesto della domanda è molto vicino allo studente e ciò può facilitare la risposta o, comunque, non aggiunge ulteriori difficoltà. L'item sarebbe stato di un livello di difficoltà più elevato se fosse richiesta argomentazione del procedimento da parte dello studente.

Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Concetti e conoscenze matematiche: Media aritmetica.
Abilità matematiche*:* Il quesito richiede l'abilità di leggere le informazioni fornite e di saper calcolare una nuova media a partire da una media precedente, con l'aggiunta di un nuovo dato.

Capacità fondamentali e processi coinvolti

- **Comunicazione**, relativamente al processo di "formulazione in forma matematica" (è richiesta la capacità di leggere ed interpretare i dati forniti) e di "utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (è richiesto di articolare una soluzione e di presentare il risultato);
- **Rappresentazione:** relativamente al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti" (è richiesto di dare un senso, mettere in relazione), al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve confrontare o valutare due o più rappresentazioni in relazione ad una situazione) e al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve Interpretare i risultati matematici in diversi formati in relazione alla situazione o all'utilizzo);
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi,** relativamente al processo di "Formulazione di situazioni in forma matematica" (lo studente deve selezionare o elaborare un piano o una strategia per inquadrare il problema contestualizzato in forma matematica), al processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve attivare meccanismi di controllo efficaci nel corso delle varie fasi del procedimento che porta alla soluzione) e al processo di "Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici" (lo studente deve elaborare e mettere in atto una strategia finalizzata a interpretare, valutare e convalidare la soluzione a un problema contestualizzato).
- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni**, relativamente al solo processo di "Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici" (lo studente deve utilizzare algoritmi per il calcolo della media).

Analisi item

Si tratta di una domanda a risposta aperta univoca, nel senso che viene richiesto allo studente di scrivere la propria risposta senza giustificare il proprio ragionamento. Lo studente, per rispondere a questa domanda, deve leggere le informazioni fornite e deve saper calcolare una nuova media aritmetica a partire da una media precedente e con l'aggiunta di un nuovo dato. Potrebbe fare il seguente ragionamento o ragionamenti simili a questo:

- siccome la media aritmetica precedente è 60, vuol dire che la somma dei voti precedenti, diviso per il totale dei voti (4) è 60. Allora si può immaginare che la somma dei 4 voti faccia 240. Si può, pertanto, aggiungere a 240 questo dato il nuovo voto (80) e calcolare la nuova media aritmetica dividendo questa somma (320) per il totale dei voti (5). In questo modo si ottiene la nuova media, ossia 64, che è la risposta esatta.

Lo studente deve riportare questa risposta nell'apposito spazio. Un possibile errore potrebbe essere quello di rispondere 70, ossia fare la media tra il precedente calcolo, 60, e il nuovo dato, 80.

Percentuali di risposte degli studenti

MATEMATICA- PISA 2003

M468Q01T - Verifica di scienze

	Risposta 0	***Risposta1***	*Non valide*	*Omesse*	*Non raggiunte*
Area	*%*	*%*	*%*	*%*	*%*
Nord Ovest	25,9	**62,2**	2,8	5,2	3,9
Nord Est	31,0	**55,7**	4,1	4,9	4,4
Centro	34,2	**50,4**	5,5	4,0	5,9
Sud	36,9	**34,2**	8,3	10,2	10,4
Sud Isole	34,3	**39,0**	6,1	10,7	9,8
ITALIA	*32,6*	***47,5***	*5,5*	*7,3*	*7,1*
OCSE	*35,1*	***44,7***	*0,0*	*15,8*	*4,4*

* La colonna in grassetto corrisponde alla risposta corretta.

Dalle percentuali presenti nella tabella qui sopra si evidenzia il livello di complessità abbastanza elevato di questo item. Infatti meno della metà degli studenti OCSE (il 44,7%) risponde correttamente. In Italia, la percentuale degli studenti che rispondono correttamente (47,5%) supera la media OCSE e questo è un dato estremamente significativo. L'attenzione va posta anche sulle percentuali di risposte omesse. In Italia un numero inferiore di studenti non risponde rispetto alla media OCSE (il 7,3% rispetto al 15,8%). Anche questo dato è significativo ed è in controtendenza rispetto ai risultati di prove simili a questa.
Il quesito è molto interessante e riguarda comunque un contesto familiare per lo studente. Sarebbe auspicabile realizzare quesiti simili a questo ma con argomentazione del procedimento da parte dello studente, per comprendere meglio quale processo cognitivo è alla base di un suo ragionamento.