GEOMETRIA EUCLIDEA DOPO EUCLIDE

Emilio Ambrisi

Non basta imparare molte cose
occorre anche
imparare a gestire quel che si sa

Sunto. Il lavoro presenta alcuni risultati di geometria euclidea ottenuti dopo Euclide, alcuni di essi rilevanti anche nella ricerca attuale.

Abstract. In this paper we present some results of Euclidian geometry, established after Euclide, some of these are important also in the modern research.

Parole chiave. Euclide, teorema, rete minima.

"*Circa il 300 avanti Gesù Cristo visse il famoso Euclide. Egli fu quello, che riunì le verità geometriche elementari, e ne formò quella sì famosa opera degli Elementi di Geometria, della quale sono state fatte cotante traduzioni ed edizioni in tutte le lingue*".

Il passo è tratto da una singolare "*Storia dell'Astronomia*". Singolare perché scritta da un quindicenne d'eccezione: **Giacomo Leopardi** (1798-1837). Egli conobbe questa *sì famosa opera* come l'hanno conosciuta generazioni e generazioni di giovani e di intellettuali, e non è facile parlare di Geometria e di Insegnamento senza citarla, citare gli **Elementi di Euclide**.

Si dice che una delle caratteristiche della matematica sia quella di risultare interamente cumulativa nel senso che essa nulla sconfessa delle sue conquiste. Ciò che è valido continua ad esserlo e i risultati si aggiungono ai risultati in una sequenza che realisticamente è temporale, cronologica. È solo nell'accurata indagine storica però che tale aspetto cronologico può – e non sempre – evidenziarsi; per il resto la sistemazione, l'organizzazione logica e concettuale porta ad un generale rimescolamento ed alla perdita del peso del riferimento cronologico. La matematica finisce per collocarsi in una dimensione atemporale e questo oggi come millenni fa perché essa tende a conoscere "*ciò che sempre è e non ciò che nasce e perisce*" (**Platone**). Non vi è nulla di effimero di transeunte, di cadùco, nella matematica eccetto forse i tentativi di conoscenza, quelli che riguardano il particolare momento della ricerca e ancora l'organizzazione dei suoi contenuti. Anzi, la matematica di un determinato momento storico è soprattutto l'organiz-zazione e la sistemazione che essa vi assume.

Da questo punto di vista il lavoro conclusivo cui tendere sarebbe appunto quello dell'ottenimento della forma standard, canonica, finale per certi versi (e fatti salvi i risultati di Gödel), della sua organizzazione.

Forse ogni lavoro matematico ha alla sua base l'obiettivo di porre la parola "fine" su una particolare questione o su un capitolo, ma poche organizzazioni hanno sfidato il tempo o segnato un punto "eccezionale": di arrivo, nell'aver dato corpo unitario alle conoscenze acquisite; di partenza, per aver indicato una via ed un metodo

Certamente tra queste grosse opere è da annoverarsi la Geometria di **Descartes** il cui anno di pubblicazione, il 1637, viene considerato da non pochi storici l'inizio del "periodo moderno".

Certamente va menzionata l'Analyse di **A. Cauchy** anche se più particolare e circoscritta, e ancora l'opera di **Cantor**, quella successiva di **Hilbert** e più vicina a noi quella di **Bourbaki**.

Ma l'organizzazione che più ha retto è certamente quella dovuta ad Euclide. I suoi Elementi veramente hanno sfidato i secoli, affascinato e annichilito le menti, segnato l'avvio del più lungo degli imperi possibili dovuto in gran parte al suo potere di modello insuperabile e solo imitabile. Dopo un lungo periodo di silenzio, fu la cultura del Rinascimento, l'erudizione classica, la voglia di volgarizzazione ad imporre la traduzione di Euclide e la sua divulgazione. Fu un richiamo forte per tutti: la geometria quale strumento di matematizzazione della realtà ed il suo mito di perfezione e verità.

Un modello per la organizzazione delle discipline di studio, la *ratio ordinis studiorum,* un legame stretto e indissolubile tra ciò che è scienza e ciò che è pedagogia. L'itinerario scientifico è anche la "via regia" per il percorso didattico. La pratica pedagogica e la didattica si compenetrano in quella organizzazione. E così e stato tanto che per i giovani che la studiano – e per gli adulti che l'hanno studiata – la geometria euclidea è quel che è: un insieme di definizioni, teoremi e dimostrazioni che è possibile ripercorrere (se non ricostruire) con l'aiuto del ragionamento e con l'uso di carta e matita per tracciare linee, triangoli, cerchi, ecc.

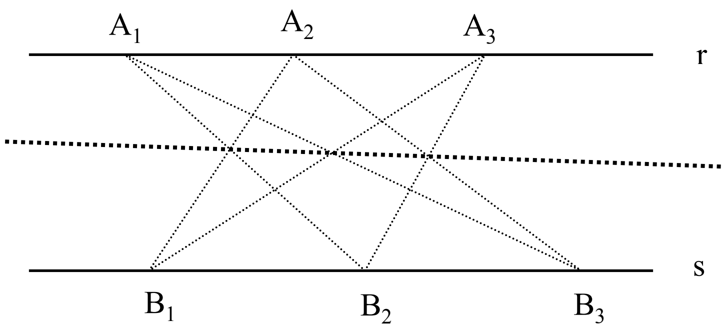
In definitiva appare come un corpo ben definito, con nulla da aggiungere: tutto sembra essere detto in quei **465 teoremi** di cui l'opera di Euclide si compone.

Non è così ovviamente: la geometria euclidea –e potremmo aggiungere sintetica con riferimento al metodo euclideo – è viva e sempre lo è stata, a più riprese nel corso dei secoli e i risultati che si riportano dimostrano "*la quasi inesauribile ricchezza di questa vecchia disciplina*" **(C. Boyer)** .

Si tratta di una breve selezione di risultati ove è percepibile peraltro l'accentuazione di uno degli aspetti fondamentali della geometria euclidea, forse quello che ne ha decretato il successo e quello più sottaciuto: l'aspetto magico.
Non è forse una magia tirare delle linee, considerare degli elementi e… oplà…la sorpresa, se volete la regolarità, l'ordine, la pulizia, la chiarezza, la bellezza della costruzione, della configurazione e delle forme?

TEOREMA DI PAPPO

Prendiamo due rette (r ed s), segnamo i punti A_1, A_2, A_3 su r e B_1, B_2, B_3 su s.



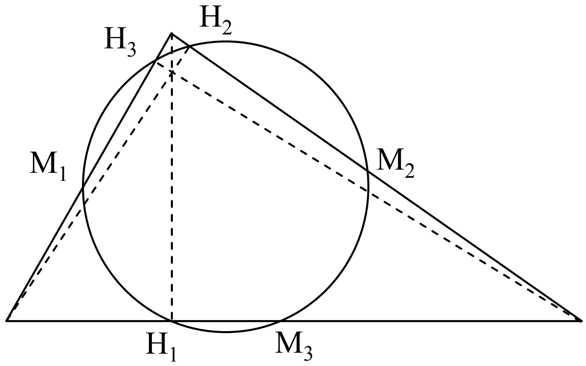
I punti di intersezione giacciono tutti sulla stessa retta. Questo antico risultato risale a **Pappo** ed è noto come teorema di Pappo. La generalizzazione di tale teorema è dovuta a **B. Pascal** (1623-1662) ***mysterium exagrammaticum*** – *filosofo pieno di immaginazione e di spirito poetico*, come lo definisce **G. Leopardi** – ed appartiene al periodo di un rinnovato gusto ed interesse per lo studio della geometria euclidea che di lì a poco doveva nuovamente essere sopraffatto dalla moda dei metodi analitici.

LA RETTA DI EULERO

Circa un secolo dopo, sempre nello spirito della geometria euclidea , **L. Eulero** (1707-1783) provò che: il *circocentro*, l'*ortocentro* ed il *baricentro* di un triangolo giacciono sulla stesa retta che in suo onore è ancora detta *retta di Eulero*. Provò ancora che la distanza tra baricentro ed ortocentro è doppia della distanza tra circocentro e baricentro.

LA CIRCONFERENZA DI FEUERBACH

Dato un triangolo ABC associati ad esso vi sono nove punti: i punti M_i Medi dei lati, i piedi H_i delle tre altezze, i punti medi delle congiungenti i vertici con il punto di intersezione delle altezze.



Questi nove punti stanno su un cerchio: il cerchio dei nove punti. Il teorema comparve negli *Annales di* **Gergonne** in un articolo firmato da due grandi geometri **Brianchon** e **Poncelet** nel 1821 ma venne attribuito all'insegnante liceale **Karl Wilhelm Feuerbach** (1800-1834), che lo pubblicò solo dopo, nel 1822.

"*Il fatto* – scrive C. Boyer (in Storia della Matematica) – *che la circonferenza dei nove punti sia nota come la circonferenza di Feuerbach, non si spiega con ragioni di priorità, ma è giustificata dalle altre interessanti proprietà di tale circonferenza messe in luce da Feuerbach*".

Una di queste riguarda il fatto che il suo centro non solo giace sulla retta di Eulero ma coincide con il punto medio del segmento che ha per estremi l'ortocentro ed il circocentro.
Ancor più sorprendente è un'altra proprietà, ricordata proprio come:

TEOREMA DI FEUERBACH

La circonferenza dei nove punti è tangente internamente al cerchio inscritto e tangente esternamente a ciascuno dei tre cerchi ex iscritti.

Questo teorema è stato definito da molti geometri e storici **il più bel teorema di geometria elementare** che sia stato scoperto dai tempi di Euclide in poi.

TEOREMA DI NAPOLEONE [1]

Il fatto che il più grande genio militare della storia moderna abbia dato il suo nome ad un teorema di geometria costituisce per chi l'apprende per la prima volta una vera sorpresa, anche perché il teorema si presenta di una singolare bellezza e linearità. L'enunciato è questo: se prendiamo un triangolo, qualsiasi, e costruiamo esternamente ad esso, sui suoi tre lati i rispettivi tre triangoli equilateri, ebbene: i centri di questi tre triangoli sono i vertici di un triangolo equilatero.

Per chi viaggia in internet è facile scoprire che il teorema piace: lo riportano un po' tutti completo anche di rapidi ed efficaci dimostrazioni.

TEOREMA DELLE TRISETTRICI

Un carattere di novità presenta il teorema seguente:

Dato un triangolo ABC, se si tracciano le ***trisettrici*** *degli angoli, trisettrici adiacenti si incontrano nei vertici di un triangolo equilatero.*

Questo nuovo teorema di geometria euclidea, secondo **M. Kline**, fu scoperto da **Frank Morley** nel 1899 e la novità consiste nel fatto che vengono prese in considerazione le trisettrici, cosa non ancora bene accetta in geometria sintetica euclidea, facendosi riferimento soltanto ad elementi e figure costruibili. "*La costruibilità garantisce l'esistenza*".

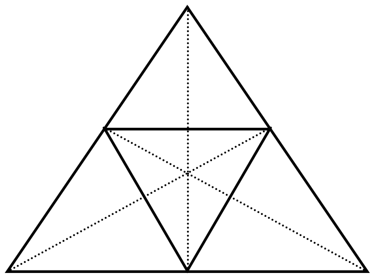
Risultati ancora più copiosi si sono avuti nell'ambito della considerazione di problemi di massimo e di minimo.

TEOREMA DI SCHWARZ

Dato un triangolo acutangolo, tra tutti i triangoli che hanno i vertici sui lati di esso, ha perimetro minimo quello i cui vertici sono i piedi delle altezze del triangolo dato.

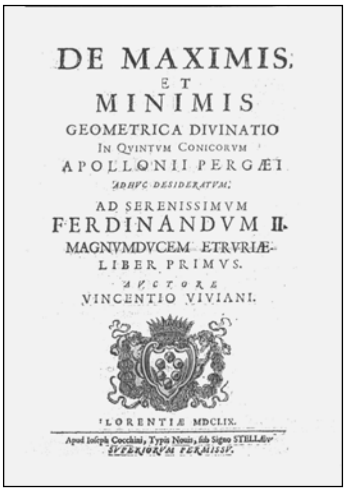
Questo risultato è di **H.A. Schwarz** (1843-1921) allievo di **Weierstrass.**

[1] Vedi all'interno di questo periodico a pag. 13 la dimostrazione offerta dalla pro.ssa Rosa Buonanno.



IL PROBLEMA DI TORRICELLI - VIVIANI

Vincenzo Viviani (1622-1703) nel suo **De Maximis et Minimis,** dato alla stampa nel 1659, avvertì la necessità di inserire una appendice per dare spazio alla trattazione di due problemi che avevano attirato l'attenzione dei più noti e valorosi matematici del suo tempo; due problemi dunque che risultavano, diremmo oggi, di grande attualità.



DE MAXIMIS
ET
MINIMIS
GEOMETRICA DIVINATIO
IN QVINTVM CONICORVM
APOLLONII PERGÆI
ADHVC DESIDERATVM.
AD SERENISSIMVM
FERDINANDVM II.
MAGNVMDVCEM ETRVRIÆ.
LIBER PRIMVS.
AVCTORE
VINCENTIO VIVIANI.

FLORENTIÆ MDCLIX.

Apud Ioseph Cocchini, Typis Nouis, sub Signo STELLÆ.
SVPERIORVM PERMISSV.

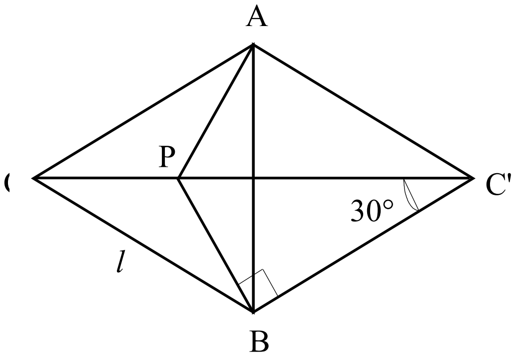
Il primo di tali problemi era stato oggetto di una corrispondenza tra Torricelli, che Viviani definisce *summus geometra* e Fermat, Roberval, de Verdus che sempre Viviani reputa tra i migliori matematici della Gallia per non dire d'Europa. Ma di questo problema si era pure interessato B.Cavalieri. Da quel che dice Viviani comunque, fu Fermat a proporlo a Torricelli e questi, pure se non intravide subito la soluzione, di li a poco lo risolse per più vie e lo propose agli allievi in una forma che corrisponde alla seguente:

> *"Dato un triangolo ABC i cui angoli misurano ciscuno meno di 120°, trovare un punto P tale che la somma PA+PB+PC sia minima".*

Viviani risolse il problema non senza, egli dice, iterati sforzi e riesce anche a trovarne una soluzione molto elegante e comoda nella comunicazione.

La soluzione di Viviani è questa: P è il punto che “vede” o proietta i lati AB, BC, CA sotto angoli di 120°.

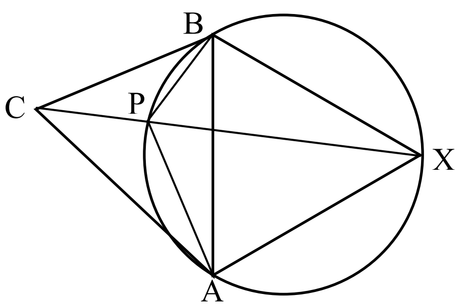
Nel caso del triangolo equilatero la soluzione è molto evidente. P è il baricentro del triangolo. Costruendo il triangolo simmetrico rispetto, ad esempio, al lato AB è facile verificare che PA+PB+PC = CC′.



$$PA+PB+PC=CC' = l\sqrt{3}$$

Nel caso più generale la costruzione è la seguente: sul lato più lungo si costruisce un triangolo equilatero e si considera la circonferenza ad esso circoscritta; l’intersezione della circonferenza con il segmento CX è il punto P cercato.

Risulta ancora che PA+PB+PC = CX ed ha valore minimo.



$$A\hat{P}C = A\hat{P}B = B\hat{P}C = 120°$$

$$PA+PB+PC = CX$$

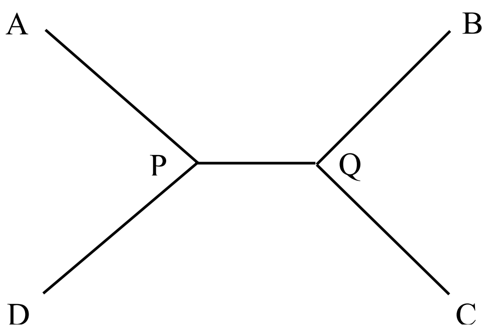
problema risolto da Viviani non pare abbia suscitato altri interessi anche successivi e rimase nell’ombra fino a quando J. Steiner (1796-1863) non lo riscoprì per suo conto nel 1837 dandone anche una generalizzazione ritenuta però, in seguito, di scarso interesse e “una delle generalizzazioni superficiali che si incontrano spesso nella letteratura matematica".

Il giudizio sulla generalizzazione operata da Steiner è di R. Courant e H. Robbins che hanno avuto il merito di riformulare il problema, che impropriamente attribuiscono a Steiner, e di portarlo all'attenzione della comunità matematica in ragione del largo e meritato successo del loro "**Che cos'è la matematica?**". Per trovare – scrivono Courant e Robbins – la generalizzazione del problema di Steiner che abbia un vero interesse, si deve abbandonare la ricerca di un solo punto P e proporsi invece la determinazione del **reticolato** di lunghezza totale. In termini matematici diremo: "Dati n punti A_1, A_2, ... , A_n, trovare un sistema connesso di segmenti, di minima lunghezza totale, tale che ogni coppia di punti possa essere collegata con un poligono formato da segmenti del sistema".

L'importanza anche pratica del problema appare chiara se si riflette che i punti possono essere rappresentativi di città da collegare con una rete stradale o abbonati di una società telefonica o ancora se si tratta della progettazione di una rete di tubature o di un circuito elettronico: vi sono tutti gli interessi per realizzare reti minime che siano cioè le più corte possibili, sia tecnici, sia di funzionamento, sia ancora economici.

Il fatto è che al crescere del numero n di punti (n si può assumere come la misura della dimensione del problema) il problema diventa intrattabile. I tempi di risoluzione crescono esponenzialmente con n: è cioè un problema NP (non deterministico in un tempo polinomiale).

Un'idea delle difficoltà può formarsi dall'esame della situazione, particolarissima, di 4 punti disposti ai vertici di un rettangolo, dove occorrono due punti aggiuntivi, detti anche **punti di Steiner**



La somma
AP+DP+PQ+QB+QC
è la lunghezza minima
per congiungere i 4 punti
A, B, C, D.

o anche dall'esame del grafico seguente, rappresentativo del collegamento minimo tra 29 città degli Stati Uniti.[2]

Il problema con 29 punti poco più di un decennio fa era già al limite delle possibilità di elaborazioni di potenti computer.

[2] Il grafico è tratto da : "*Il problema della rete di lunghezza minima*" di M.W. Bern-R. Graham in LE SCIENZE n.247, marzo 1989.