

# RISCOPRENDO LA GEOMETRIA DEL TRIANGOLO

Benedetto Scimemi

Università di Padova

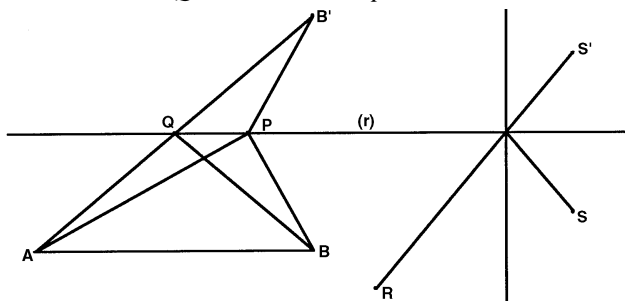
Nella geometria euclidea del piano il *triangolo* è protagonista: fonte inesauribile di problemi, palestra di dimostrazioni più o meno elementari, il triangolo fa la sua comparsa precocemente nei nostri programmi scolastici, ma troppo presto ne scompare, quando si è acquisita poco più che la nomenclatura ma non si è avuto il tempo di raccogliere la ricca messe di risultati che pur sono apprezzabili da parte dei giovanissimi.

L'argomento *trasformazioni geometriche* compare anch'esso assai presto nei programmi, ma non è corredato dalle istruzioni per l'uso. Molti insegnanti si chiedono: ammesso che si trovi il tempo per descrivere le trasformazioni fondamentali (traslazioni, rotazioni, omotetie, ecc.) che cosa dobbiamo poi farcene? come motivare questo lavoro supplementare ed evitare che si tratti dell'ennesimo elenco di nomi superflui?

In questa conversazione mi propongo di rivisitare certi teoremi classici (alcuni sono notissimi) della geometria elementare del triangolo, che portano il nome di grandi geometri del passato (Torricelli, Fagnano, Eulero, Poncelet ecc.), cercando di utilizzare - quando sembrerà conveniente - le similitudini del piano. Questo metodo rende spesso le dimostrazioni più *intuitive* (non più rigorose) di quelle tradizionali. Così gli argomenti *triangolo* e *trasformazioni* dovrebbero aiutarsi l'uno con l'altro. Le nozioni che daremo per scontate (sia per il triangolo che per le similitudini) sono quelle descritte in un buon libro per la scuola media.

## 1. PROBLEMI DI MINIMO: USO DI SIMMETRIE ASSIALI

**Problema.** Consideriamo l'insieme dei triangoli che hanno una certa base  $AB$  e una certa altezza  $h$ . Quale tra essi ha perimetro minimo?



I triangoli in questione hanno il terzo vertice  $P$  sulla retta  $r$ , parallela ad  $AB$  e da essa distante  $h$ . Occorre scegliere  $P$  in modo che sia minima la somma  $|AP| + |PB|$ . Si consideri il punto  $B'$ , simmetrico di  $B$  rispetto a  $r$ . Allora  $|AP| + |PB| = |AP| + |PB'|$  e quest'ultimo è minimo quando il percorso  $APB'$  è rettilineo. Tracciata la retta per  $A$ ,  $B'$  e intersecatala con  $r$  in  $Q$ , si applicano le proprietà della simmetria per trovare  $|AQ| = |QB'| = |QB|$ . Si conclude :

**[1] tra tutti i triangoli che hanno una certa base e una certa altezza, il triangolo isoscele è quello che ha il perimetro minimo.**

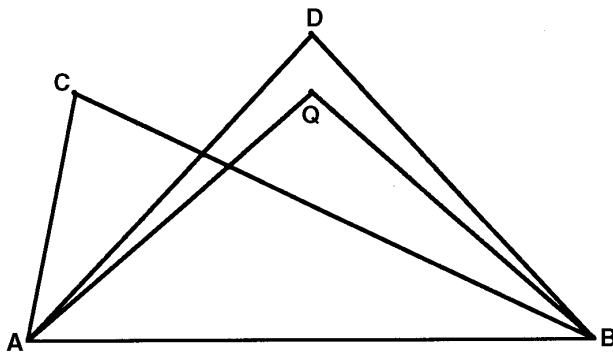
**Problema.** *Come scegliere la direzione di un raggio luminoso uscente da  $R$  in modo che, dopo una riflessione sullo specchio  $r$ , arrivi in  $S$ ?*

Sapendo che la luce percorre percorsi minimi (principio di Fermat) si dimostra che

**[2] il raggio in arrivo e quello riflesso formano con lo specchio angoli eguali** (legge di Cartesio).

**Problema.** *Consideriamo l'insieme dei triangoli che hanno un certo lato e un certo perimetro. Quale tra essi ha area massima?*

Possiamo derivare la dimostrazione dal teorema precedente.



Siano:  $ABC$  un triangolo di base  $AB$ , perimetro  $p$ , area  $A$ .

$ABD$  un triangolo isoscele di base  $AB$ , perimetro  $p$ , area  $A^*$

$ABQ$  un triangolo isoscele di base  $AB$ , perimetro  $p^{**}$ , area  $A$ .

Per il teorema precedente,  $p^{**} \leq p$ . Confrontando i due triangoli isosceli si ha allora  $A \leq A^*$ . Dunque

**[3] tra tutti i triangoli che hanno un certo lato e un certo perimetro, quello isoscele ha area massima.**

## 2. IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO

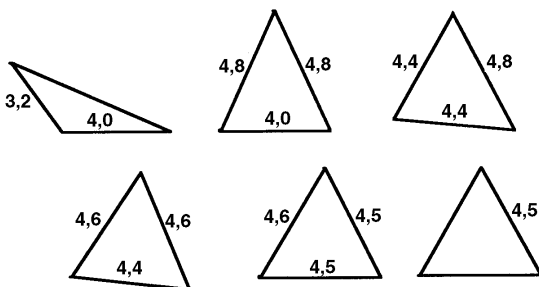
Nel classico problema isoperimetrico ci si chiede: *tra i poligoni di n lati che hanno un certo perimetro, quale ha area massima?* Il caso più semplice è ovviamente quello del triangolo, che ha la seguente prevedibile risposta:

**[4] tra tutti i triangoli che hanno un assegnato perimetro, quello equilatero ha area massima.**

La dimostrazione sembrerebbe a portata di mano applicando [3], ma occorre sapere a priori che un tale massimo esiste. Se invece ci si accinge a costruirlo, si innesca una situazione più complessa. Partiamo dal triangolo  $T = ABC$  e sia  $|AB| = c$ ,  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $p = a+b+c$ . L'area di  $T$  sia  $\Delta$ . Applicando ripetutamente [3], costruiremo una successione di triangoli isosceli  $T_1, T_2, T_3, \dots$  ciascuno di perimetro  $p$ , ma di area crescente ( $\Delta \leq \Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \dots$ ). Proveremo che le lunghezze dei loro lati vanno avvicinandosi quanto si vuole a  $p/3$ , cioè  $T_n$  tende, al crescere di  $n$ , verso un triangolo equilatero.

Ecco la costruzione

$T_1$ :	base	$c$	altri due lati	$(a+b)/2$	$= s_1/2$
$T_2$ :	base	$s_1/2$	altri due lati	$(c + s_1/2)/2$	$= s_2/2$
$T_3$ :	base	$s_2/2$	altri due lati	$(s_1/2 + s_2/2)/2$	$= s_3/2$
$T_n$ :	base	$s_{n-1}/2$	altri due lati	$(s_{n-2}/2 + s_{n-1}/2)/2$	$= s_n/2$



Si vede subito che in ogni passaggio da un triangolo al successivo si conservano uno dei lati e il perimetro e dunque l'area non diminuisce. Calcoliamo ora la differenza  $d_n$  tra i lati diversi:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= c - s_1/2 \\
 d_2 &= (s_2 - s_1)/2 = (c - s_1/2)/2 = d_1/2 \\
 d_3 &= (s_2 - s_3)/2 = (s_2 - s_1)/4 = d_1/4 \\
 d_4 &= (s_4 - s_3)/2 = (s_2 - s_3)/4 = d_1/8 \\
 \text{In generale si trova } d_n &= d_1/2^{n-1}
 \end{aligned}$$

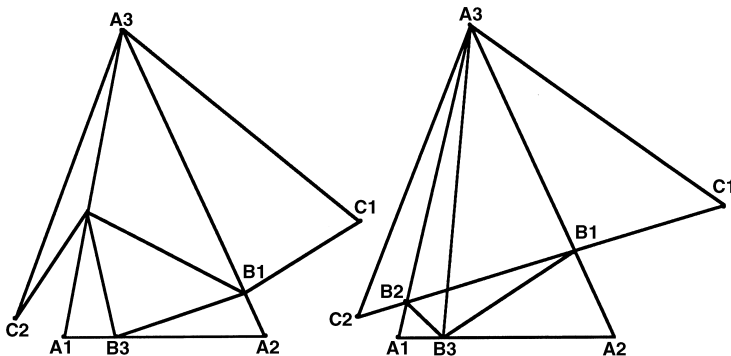
una quantità che diventa piccola quanto si vuole, pur di prendere  $n$  abbastanza grande. Così è intuitivo pensare che il triangolo equilatero, di lato  $p/3$ , è il limite di quella successione, e la sua area è  $\Delta^* \geq \Delta_n > \Delta$ .

L'argomentazione precedente potrebbe diventare una rigorosa dimostrazione, ma occorrerebbe corredarla con la nomenclatura e le proprietà dei limiti. Esistono naturalmente dimostrazioni alternative (quelle più note utilizzano la formula di Erone e il teorema delle medie aritmetica e geometrica), ma tutte richiedono una certa preparazione di risultati ausiliari. Anche per questo appare veramente notevole - per brevità e autonomia - la risoluzione del prossimo problema che ora esporremo: è un'idea che ebbe L. Fejer nel 1900.

### 3. IL PROBLEMA DI FAGNANO

*Come si devono scegliere tre punti  $B_1, B_2, B_3$  sui tre lati di un triangolo acutangolo  $A_1A_2A_3$  affinché sia minimo il perimetro del triangolo  $B_1B_2B_3$ ?*

Si potrebbe pensare di procedere come sopra: fissati due punti  $B_1, B_2$  (rispett. su  $A_2A_3$  e  $A_3A_1$ ) cercare la scelta migliore per  $B_3$  su  $A_1A_2$ . Poi con la coppia  $B_2, B_3$  cercare un nuovo  $B_1$  che diminuisca il perimetro ecc. Ma questo ci porterebbe ancora una volta a una successione infinita di triangoli. L'idea vincente di Fejer è invece quella di fissare un solo punto  $B_3$  e ottimizzare in un sol colpo le scelte di  $B_1, B_2$ . Il problema si suddivide in due sottoproblemi: 1) *Prefissato arbitrariamente il punto  $B_3$  sul lato  $A_1A_2$ , come si debbono scegliere i punti  $B_1$  (sul lato  $A_2A_3$ ) e  $B_2$  (sul lato  $A_3A_1$ ) per minimizzare la lunghezza  $p = |B_1B_2| + |B_2B_3| + |B_3B_1|$ ?* 2) Risolto il problema 1, si vedrà che la scelta di  $B_3$  individua gli altri due punti  $B_1, B_2$ . *Come si deve scegliere  $B_3$ ?*



Problema 1). Sul lato  $A_1A_2$  si prefissi arbitrariamente il punto  $B_3$ . Siano  $C_2$  e rispettivamente  $C_1$  i punti simmetrici di  $B_3$  rispetto alle rette per  $A_3A_1$  e  $A_3A_2$ . Allora  $p = |C_1B_1| + |B_1B_2| + |B_2C_2|$ . È chiaro che il tragitto più breve si ottiene quando la spezzata  $C_1B_1B_2C_2$  è rettilinea, e questo individua i punti  $B_1, B_2$  come intersezioni della retta per  $C_1C_2$  con i lati  $A_2A_3, A_1A_3$ . 2) Calcoliamo la lunghezza  $p$ . Si ha  $|C_1A_3| = |A_3B_3| = |C_2A_3|$  e dunque il triangolo  $C_1A_3C_2$  è isoscele. Poichè l'angolo  $\angle C_1A_3C_2$  è il doppio di  $\angle A_2A_3A_1$  (e quindi è indipendente dalle scelte) la sua base  $C_1C_2$  ha lunghezza minima quando è minima quella dei suoi lati eguali, che a loro volta hanno la lunghezza di  $A_3B_3$ . Allora il problema diventa: come scegliere  $B_3$  affinché sia minima la sua distanza da  $A_3$ ? Evidentemente,  $B_3$  è il piede dell'altezza per  $A_3$ . Con questa scelta di  $B_3$ , possiamo scoprire che i punti  $B_1, B_2$  individuati dallo stadio 1 sono anch'essi i piedi delle altezze. Infatti, rifacendo il ragionamento precedente dopo una permutazione dei vertici, si vede che se  $B_2$  non fosse il piede dell'altezza per  $A_2$  il perimetro non potrebbe essere minimo.

Il risultato che abbiamo provato si usa enunciare dicendo:

**[5] tra tutti i triangoli iscritti in un certo triangolo (acutangolo) il triangolo ortico è quello che ha perimetro minimo.**

Incidentalmente, dal precedente ragionamento si ottiene un importante risultato che non avevamo perseguito: se i punti  $B_i$  sono i piedi delle altezze, la retta per  $C_1B_1B_2C_2$  e la retta  $B_3B_2$  sono simmetriche rispetto al lato  $A_1A_3$ , dunque anche rispetto all'altezza  $A_2B_2$ .

Questa circostanza si può esprimere con le leggi della riflessione, ovvero dei rimbalzi di una sponda elastica, che teoricamente sono le stesse:

**[6] i lati del triangolo ortico si ottengono l'uno dall'altro per riflessione sui lati del triangolo originario**

**[7] in un biliardo triangolare il perimetro del triangolo ortico è un'orbita chiusa,**

cioè si tratta di una traiettoria che una bilia percorre indefinitamente.

Siamo ora in grado di risolvere facilmente anche i seguenti problemi: *in un biliardo rettangolare UVWZ, assegnati due punti A, B come scegliere la traiettoria AP di una bilia che partendo da A rimbalzi prima in P sulla sponda VW, poi sulla sponda UV, per poi colpire il pallino in B? Come sono fatte le orbite chiuse?*

Nella tradizionale geometria del triangolo il risultato [6] si trova normalmente nella forma seguente, che reincontreremo più avanti:

**[8] le altezze di un triangolo (acutangolo) sono le bisettrici del suo triangolo ortico; dunque l'ortocentro del primo è l'incentro del secondo.**

#### 4. ALTRO PROBLEMA DI MINIMO: USO DI ROTAZIONI

I teoremi precedenti ci portano a risolvere un altro famoso problema di minimo :

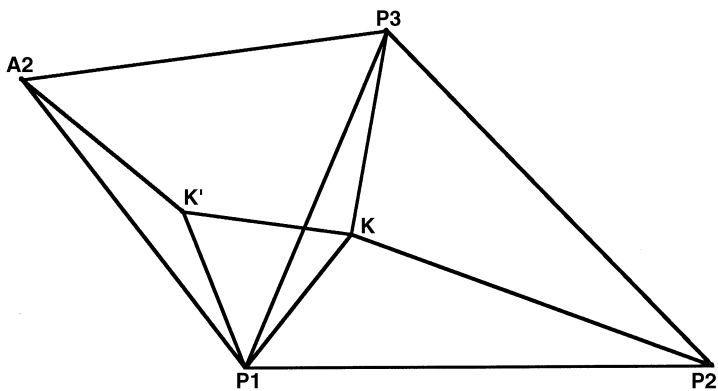
**Problema:** *Assegnato un triangolo  $P = P_1P_2P_3$ , qual è il punto  $F$  che rende minima la somma delle distanze dai vertici:  $d(F) = |FP_1|+|FP_2|+|FP_3|$ ?*

La prima soluzione di questo problema è dovuta a Cavalieri e Torricelli. La sua versione più nota è la seguente

**[9] il punto che rende minima la somma delle distanze dai tre vertici di un triangolo è quello che vede i tre lati sotto il medesimo angolo ( $2\pi/3$ ).**

Vi sono modi assai diversi di provare questo risultato. Qui ci proponiamo di fare uso delle rotazioni.

Assegnato il triangolo  $T = P_1P_2P_3$ , si costruisca, esternamente, un triangolo equilatero  $T_3 = P_1P_2A_3$  (cioè in modo che  $A_3$  e  $P_3$  stiano, rispetto al lato  $P_1P_2$ , su semipiani opposti) e analogamente si costruiscano i triangoli equilateri  $T_1 = P_2P_3A_1$ ,  $T_2 = P_3P_1A_2$ . Proviamo anzitutto che  $F$  appartiene alle tre rette  $A_iP_i$ . Assegnato un qualunque punto  $K$ , sottoponiamo il triangolo  $P_1KP_3$  ad una rotazione  $\rho$  di ampiezza  $\pi/3$ , attorno al punto  $P_1$ , che porti  $P_3$  su  $A_2$ . Allora, se  $\rho$  manda  $K$  in  $K'$ , anche il triangolo  $P_1KK'$  è equilatero. Ne segue l'uguaglianza  $|A_2K'|+|K'K|+|KP_2| = |KP_3|+|KP_1|+|KP_2| = d(K)$ .



La spezzata  $A_2K'KP_2$  ha lunghezza minima se è rettilinea, cioè se  $K$  e  $K'$  appartengono al segmento  $A_2P_2$ . Accertato dunque che, nella ricerca del minimo, occorre scegliere  $K$  sul segmento  $A_2P_2$ , basterà ragionare analogamente con riferimento agli altri vertici del triangolo per concludere che il punto di minimo deve appartenere anche alle rette  $A_1P_1, A_3P_3$ . |

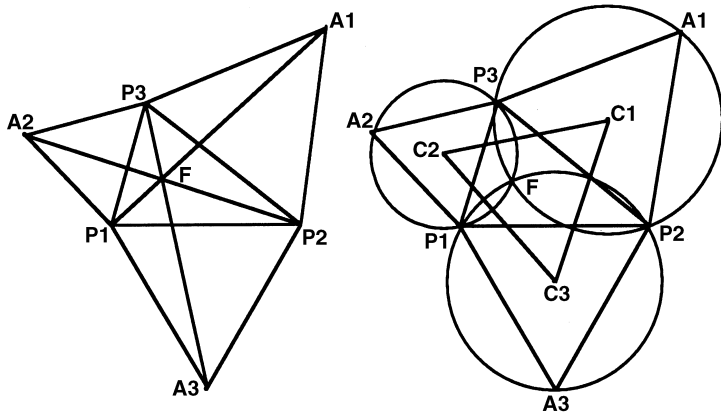
Abbiamo così visto che

[10] le tre rette  $A_1P_1$ ,  $A_2P_2$ ,  $A_3P_3$  hanno un punto  $F$  in comune; la somma delle distanze dai vertici  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  ha un minimo in  $F$ , e questo minimo è la lunghezza di ciascuno dei tre segmenti  $A_iP_i$ .

Un'altra costruzione del punto di minimo e la sua caratterizzazione secondo l'enunciato [9] si ottengono ora come segue. Consideriamo le circonferenze  $C_1$  e  $C_2$ , circoscritte ai triangoli  $T_1$  e  $T_2$ , e sia  $F$  la loro intersezione (diversa da  $P_3$ ). Allora gli angoli  $\angle P_1FP_3 = \angle P_3FP_2$  valgono  $=2\pi/3$ , perché supplementari di  $\angle P_1A_2P_3 = \angle P_3A_1P_2 = \pi/3$ . Così  $F$  vede sotto lo stesso angolo  $2\pi/3$  i lati  $P_2P_3$ ,  $P_3P_1$  e dunque anche il terzo lato  $P_1P_2$ . Ne segue che  $F$  appartiene anche alla circonferenza  $C_3$ , circoscritta a  $P_3$ . Per motivi analoghi risulta  $\angle P_1FA_3 = \angle P_1P_2A_3 = \pi/3$ , dunque  $\angle P_1FP_3$  è supplementare di  $\angle P_1FA_3$ , cioè i punti  $A_3$ ,  $F$ ,  $P_3$  sono allineati. Si conclude che  $F$  appartiene alla retta  $A_3P_3$ , e analogamente alle  $A_1P_1$ ,  $A_2P_2$ , cioè si tratta del punto di minimo descritto in [9].

Un'appendice al teorema precedente è attribuita a Napoleone Bonaparte (al quale si deve il maggior merito della diffusione della cultura geometrica nelle scuole europee del 19° secolo):

[11] sui tre lati di un triangolo si costruiscano, esternamente, tre triangoli equilateri. Allora i loro centri sono i vertici di un triangolo equilatero (detto il *triangolo di Napoleone*).



Siano  $C_i$  i centri dei cerchi  $C_i$ . Allora segmento  $FP_3$  (che ha per estremi le intersezioni di  $C_1$  e  $C_2$ ) è perpendicolare al segmento  $C_1C_2$ , e analogamente  $FP_1$  è perpendicolare a  $C_2C_3$ . Allora  $\angle C_1C_2C_3 = \pi/3$  e analogamente  $\angle C_2C_3C_1 = \angle C_3C_1C_2 = \pi/3$ .

## 5. RETTA DI EULERO, CERCHIO DEI 9 PUNTI: USO DI OMOTETIE

Un'omotetia è caratterizzata da un centro  $O$  e da un fattore  $\lambda$  ( $\neq 0,1$ ). Il generico punto  $P$  viene trasformato nel punto  $P'$  individuato dalla equazione (vettoriale)  $OP' = \lambda \cdot OP$ .

In altre parole, i punti  $P, P'$  sono allineati con  $O$ , dalla stessa parte (se  $\lambda > 0$ ) o da parti opposte (se  $\lambda < 0$ ), e risulta  $|OP'| = |\lambda| \cdot |OP|$ . Di conseguenza, un segmento  $PQ$  viene trasformato in un segmento parallelo  $P'Q'$  di lunghezza  $|\lambda| \cdot PQ$ . Se è  $\lambda > 0$ , i segmenti orientati  $PQ, P'Q'$  hanno lo stesso verso, altrimenti hanno versi opposti.

Viceversa, se un'omotetia trasforma il segmento  $PQ$  nel segmento parallelo  $P'Q'$  (non della stessa lunghezza e non allineato con  $PQ$ ) il centro dell'omotetia si ottiene come intersezione delle rette  $PP'$  e  $QQ'$ .

Nel triangolo  $A=A_1A_2A_3$  sia  $M_i$  il punto medio del lato opposto al vertice  $A_i$ . Sappiamo che le mediane  $A_iM_i$  si incontrano nel *baricentro*  $G$ , che cade a un terzo della loro lunghezza. Perciò  $A_i$  e  $M_i$  sono allineati con  $G$ , da parti opposte, l'uno a distanza doppia dell'altro:  $GM_i = (-1/2) GA_i$ . Il triangolo *mediale*  $M=M_1M_2M_3$  è dunque immagine di  $A=A_1A_2A_3$  secondo l'omotetia di centro  $G$  e fattore  $-1/2$ . Osserviamo che un'omotetia (poichè rispetta i rapporti tra lunghezze e gli angoli, come ogni similitudine) trasforma l'asse di un segmento  $PQ$  nell'asse del segmento trasformato  $P'Q'$ . Ciò significa che il circocentro di un triangolo viene trasformato nel circocentro del triangolo immagine. Considerazioni analoghe si possono fare per l'ortocentro ecc.

**[12] in un triangolo il baricentro  $G$ , l'ortocentro  $H$  e il circocentro  $O$  sono allineati (sulla *retta di Eulero*) e  $G$  divide il segmento  $OH$  nel rapporto 1:2.**

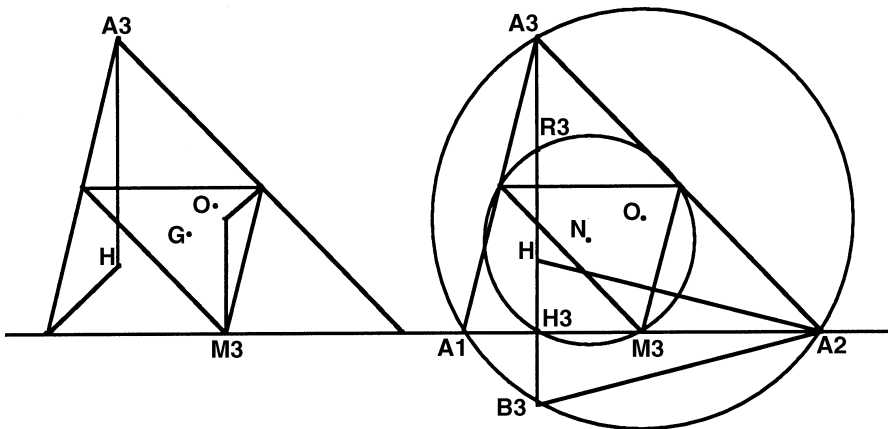
Infatti le mediane del triangolo mediale  $M=M_1M_2M_3$  sono le stesse mediane di  $A$ ; dunque  $G$  è baricentro anche di  $M$ . D'altra parte, gli assi di  $A$  sono le altezze di  $M$  e dunque il circocentro  $O$  di  $A$  è l'ortocentro di  $M$ . Riassumiamo queste osservazioni con i simboli

$$G = G_M \quad O = H_A$$

Introduciamo ora l'omotetia  $\gamma$  di centro  $G$  e fattore  $-1/2$ . Essa trasforma un punto  $P$  nel punto  $P'$  per cui  $GP' = (-1/2) \cdot GP$ . Dunque  $\gamma$  trasforma il triangolo  $A$  nel triangolo  $M = M_1M_2M_3$ .

Ora l'omotetia, come si è detto, trasforma l'ortocentro  $H$  di  $A$  nell'ortocentro  $H_M = O$  di  $M$ , perciò risulta  $GO = (-1/2) GH$ , cioè appunto  $O, H$  sono allineati con  $G$ , da parti opposte, e  $|HG| = 2|GO|$ .





Siano ora  $B$  e  $N$  le circonferenze circoscritte ai triangoli  $A$  e  $M$ . Poichè  $\gamma(A) = M$ , anche  $\gamma(B) = N$ , il raggio di  $N$  è la metà di quello di  $B$  e  $\gamma(O) = N$  è il suo centro. Dunque  $GO = -2 GN$ . Confrontando con  $GH = -2 GO$  si trova che  $N$  è il punto medio tra  $O$  e  $H$ . Con riferimento al prossimo enunciato, dovuto a Poncelet,  $N$  è noto come il circolo dei 9 punti di  $A$ .

**[13] il punto medio  $N$  tra il circocentro  $O$  e l'ortocentro  $H$  di un triangolo  $A$  è il centro di una circonferenza  $N$  cui appartengono i seguenti nove punti: i tre punti medi  $M_i$  dei lati di  $A$ , i tre piedi  $H_i$  delle altezze di  $A$ , i punti medi  $R_i$  tra  $H$  e i vertici  $A_i$  di  $A$ .**

I punti medi  $M_i$  appartengono a  $N$  per definizione. Proviamo l'appartenenza a  $N$  degli altri 6 punti. L'altezza  $A_i H_i$  di  $A$  incontra la circonferenza  $B$  (oltre che in  $A_i$ ) anche in un secondo punto  $B_i$ . Osserviamo l'uguaglianza degli angoli  $\angle A_1 A_3 B_3 = \angle H A_2 A_1$  (i cui lati sono a due a due perpendicolari) e  $\angle A_1 A_3 B_3 = \angle A_1 A_2 B_3$  (perchè sottesi dall'arco  $A_1 B_3$  in  $B$ ). Ne deduciamo che il triangolo  $H A_2 B_3$  è isoscele, e dunque  $H_3$  è il punto medio di  $H B_3$ . Lo stesso si ottiene per  $H_1, H_2$  permutando gli indici. Possiamo esprimere questo fatto dicendo che c'è un'omotetia  $\eta$  di centro  $H$  e coefficiente  $\mu = 1/2$  che manda  $B_i$  in  $H_i$ . Si trasformi ora la circonferenza  $B$  secondo  $\eta$ ; si ottiene una circonferenza il cui raggio è la metà di quello di  $B$  e il cui centro  $\eta(O)$  è medio tra  $H$  e  $O$ . Ma allora, per quanto osservato sopra,  $\eta(O) = N$  e  $\eta(B) = N$ . Poichè  $B$  è circoscritta al triangolo  $B_1 B_2 B_3$ , anche la sua immagine  $N$  è circoscritta al triangolo  $H_1 H_2 H_3$ , come si voleva. Quanto ai punti  $R_i$  dell'enunciato, basta osservare che  $\eta$  manda  $A_i$  in  $R_i$  e quindi si tratta ancora di punti di  $N$ .

Gli ultimi tre punti (dei nove) non sembrano avere la stessa ... dignità geometrica degli altri sei. Per convincerci del contrario, basterebbe inoltrarci nella *geometria del quadrangolo*, un capitolo poco conosciuto: interpretando infatti  $A_1A_2A_3H$  come un (particolare) quadrangolo completo, i nove punti precedenti diventano i sei punti medi dei sei lati e i tre punti *diagonali* (intersezione dei lati opposti); e si vedrebbe che, anche per un quadrangolo qualsiasi, vale un teorema analogo al precedente, pur di sostituire al circolo un'opportuna *conica*. Un'insolita applicazione del teorema dei nove punti ([16]) si troverà anche nel paragrafo che segue.

## 6. ALTRE SIMILITUDINI: UNA DISUGUAGLIANZA DI EULERO

In un triangolo  $A_1A_2A_3$ , per ogni vertice  $A_i$  passano una bisettrice interna e una bisettrice esterna, tra loro ortogonali. Queste sei rette si incontrano a tre a tre in quattro punti: l'incentro  $I$ , intersezione delle tre bisettrici interne, e i tre excentri  $E_i$  ( $i=1,2,3$ ), intersezione della bisettrice interna per  $A_i$  con le due bisettrici esterne per  $A_j$  e  $A_h$ . I quattro punti  $I, E_1, E_2, E_3$ , sono (i soli) punti del piano che hanno eguale distanza dalle tre rette che prolungano i lati del triangolo. Ma, tenuto conto dell'ortogonalità, questi stessi punti si possono anche interpretare come i vertici e l'ortocentro di un triangolo, di cui  $A_1A_2A_3$  è il triangolo ortico. Precisamente:

**[14] sia  $A = A_1A_2A_3$  un triangolo acutangolo e sia  $E = E_1E_2E_3$  il triangolo che ha per vertici gli excentri di  $A$ . Allora  $A$  è il triangolo ortico di  $E$  e l'incentro di  $A$  è l'ortocentro di  $E$ .**

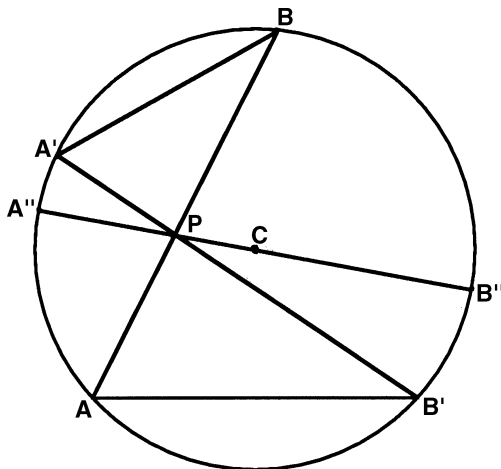
Si può confrontare questo enunciato con [8]. Se il triangolo  $A$  non è acutangolo, un analogo enunciato rimane vero, purchè si scambino i ruoli dei punti  $H, A_i$ , dove  $A_i$  è il vertice dell'angolo ottuso. A proposito di questa interscambiabilità tra vertici e ortocentro, il seguente enunciato è tanto sorprendente quanto semplice da dimostrare:

**[15] Se di quattro punti  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , uno è ortocentro del triangolo che ha per vertici gli altri tre, allora lo stesso vale per tutti gli altri.**

Combinando [13] e [14], osserviamo che la circonferenza circoscritta a  $A$  è il circolo dei nove punti di  $E$ . Allora il teorema di Poncelet garantisce, tra l'altro, che:

**[16] i punti medi tra incentro ed excentri di un triangolo appartengono alla sua circonferenza circoscritta.**

Faremo uso tra poco di [16] per dimostrare un altro celebre risultato di Eulero. Ma occorre prima richiamare un'altra osservazione, che riguarda una similitudine di triangoli già segnalata nei libri di Euclide:



[17] Sulla circonferenza  $C$  si considerino i punti  $A, B, A', B'$  e si supponga che le rette  $AB, A'B'$  si incontrino nel punto  $P$ . Allora risulta  $|PA| \cdot |PB| = |PA'| \cdot |PB'|$ .

Infatti, per le solite proprietà degli angoli al cerchio sottesi dalla stessa corda, risultano le seguenti eguaglianze:  $\angle ABA' = \angle AB'A', \angle BAB' = \angle BA'B'$ , e dunque sono simili i triangoli  $PAB', PA'B$ . L'uguaglianza del rapporto tra le lunghezze dei corrispondenti lati  $|PA'|/|PA| = |PB|/|PB'|$  si può allora scrivere  $|PA| \cdot |PB| = |PA'| \cdot |PB'|$ .

Questo prodotto dipende dunque dal punto  $P$  ma è indipendente dalla particolare corda  $AB$ ; ciò sta alla base della nozione di *potenza*  $p$  di un punto  $P$  rispetto a un cerchio  $C$ . In particolare, per calcolare  $p$  si può scegliere un diametro  $A''B''$  di  $C$  nel ruolo della corda  $AB$ . Indicata con  $d=|PC|$  la distanza di  $P$  dal centro  $C$  di  $C$  e con  $R$  il raggio di  $C$ , la potenza di  $P$  rispetto a  $C$  è data allora dalla formula

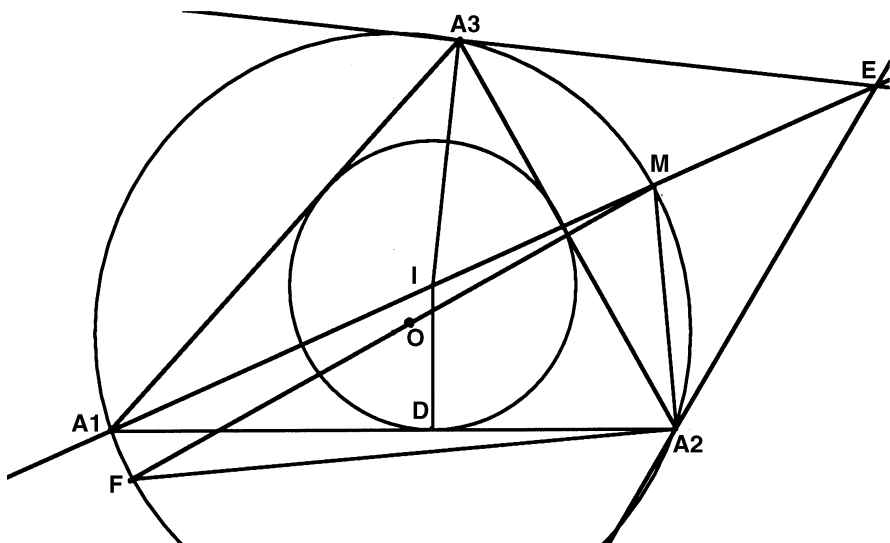
$$p = |PA''| \cdot |PB''| = (R - d) \cdot (R + d) = R^2 - d^2.$$

Abbiamo ora tutti i mezzi per dimostrare il teorema di Eulero:

[18] in un triangolo siano  $O$  il centro (circocentro) ed  $R$  il raggio del circolo circoscritto,  $I$  il centro (incentro) ed  $r$  il raggio di quello inscritto. Allora risulta  $|IO|^2 = R^2 - 2Rr$ . In particolare,  $R \geq 2r$ .

Sappiamo da [16] che il punto di mezzo  $M$  tra l'incentro  $I$  e l'excentro  $E$  appartiene alla circonferenza  $C$  circoscritta al triangolo  $A = A_1A_2A_3$ . Allora  $M$  è il centro di una circonferenza che ha  $IE$  per diametro e passa per  $A_2, A_3$ , perchè sono retti gli angoli  $\angle IA_2E$  e  $\angle IA_3E$ . Allora  $|IM| = |A_2M|$ . Calcoliamo la potenza di  $I$  rispetto alla circonferenza  $C$ , con riferimento alla corda  $A_1M$  :

$|A_1I| \cdot |IM| = |A_1I| \cdot |A_2M|$ . Sia D il punto di contatto del cerchio inscritto sul lato  $A_1A_2$ . Sia F il simmetrico di M rispetto al centro O di C. Proviamo che i triangoli rettangoli  $FA_2M$  e  $A_1DI$  sono simili. Infatti  $\angle IA_1D = \angle MA_1A_2 = \angle MFA_2$  perchè sottesi dalla corda  $A_2M$ . Dunque si ha  $|IA_1|/|MF| = |ID|/|MA_2|$ . Questo si riscrive  $|IA_1|/2R = r/|MA_2|$  e dunque, vista l'uguaglianza  $|IM|=|A_2M|$ , la potenza di I vale  $2rR$ . Ma si è visto che la potenza vale anche  $R^2 - |IO|^2$ . Ne segue, come volevamo,  $|IO|^2 = R^2 - 2rR$ .



È facile vedere che l'uguaglianza  $R = 2r$  si verifica solo nel triangolo equilatero. La disuguaglianza  $R \geq 2r$  è invece il caso particolare di una disuguaglianza scoperta molto più recentemente:

**[19] se  $A_1A_2A_3$  è un triangolo e P un punto qualunque, la somma delle distanze di P dai vertici non è minore del doppio della somma delle distanze di P dai lati.**

Questo teorema, dimostrato per la prima volta nel 1937 da Mordell, fu pochi anni dopo ridimostrato elementarmente, facendo un uso opportuno delle riflessioni, un po' come nei nostri primi esempi.

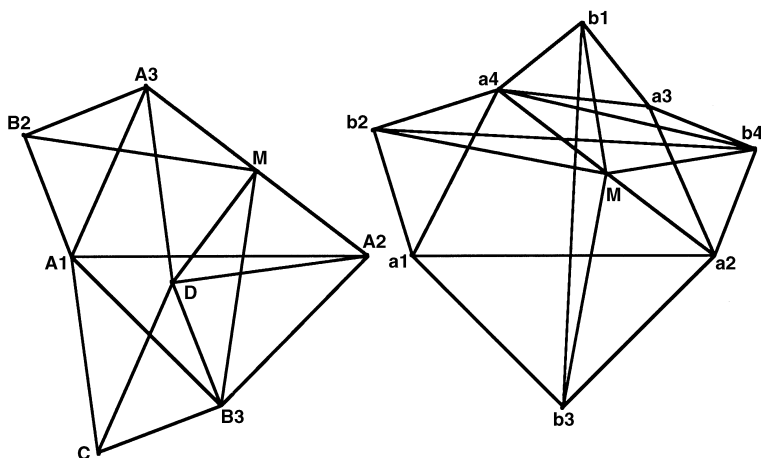
## ADDENDUM (1 /12/1995)

Al termine della conversazione con i partecipanti al corso del MPI a Viareggio, in cui avevo esposto alcuni dei precedenti risultati, il collega Massimo Galuzzi mi sottopose il seguente enunciato, di cui aveva ottenuto e illustrato ai corsisti una facile dimostrazione per via analitica, usando il PC per le manipolazioni algebriche:

**Su due lati opposti di un quadrilatero si costruiscano (esternamente) due quadrati, e si consideri il segmento che ha per estremi i centri dei due quadrati. Partendo dagli altri due lati si costruisca un analogo segmento. Allora i due segmenti sono perpendicolari .**

Come produrne una dimostrazione sintetica? Non fui allora in grado di rispondere, e solo a distanza di qualche giorno trovai una dimostrazione elementare ma poco interessante, che coinvolgeva un gran numero di angoli e di reciproche relazioni. Più recentemente ho invece ritrovato il medesimo problema tra gli esercizi del Coxeter (1), corredato da una traccia di dimostrazione per noi assai più interessante, perchè basata sull'uso delle trasformazioni geometriche, e precisamente delle rotazioni . Data la pertinenza dell'argomento, e le analogie con il metodo del § 4, ritengo opportuno svilupparne qui i dettagli. La dimostrazione del primo lemma è già nel suo enunciato:

**Lemma 1.** Sia  $A_1A_2A_3$  un triangolo e si orienti il piano in modo che la rotazione  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$  sia positiva . Sui suoi lati si costruiscano tre quadrati, uno internamente (su  $A_2A_3$ ) e due esternamente (su  $A_3A_1$  e su  $A_1A_2$ ), e siano rispettivamente  $D, B_2, B_3$  i loro centri. Sia poi  $C$  ottenuto da  $D$  per rotazione di un angolo  $\pi/2$  (in verso positivo) attorno a  $B_3$ . Allora componendo la rotazione  $-\pi/2$  attorno a  $D$  con la rotazione precedente si ottiene una traslazione che manda  $DA_3$  in  $CA_1$ .



Perciò  $A_1A_3DC$  è un parallelogramma.

**Lemma 2.** Sia  $A_1A_3DC$  un parallelogramma. Su 3 dei suoi lati  $A_1A_3$ ,  $A_3D$ ,  $DC$ , si costruiscano tre quadrati (esternamente) e siano rispettivamente  $B_2$ ,  $M$ ,  $B_3$  i loro centri. Allora il segmento  $B_3M$  si ottiene da  $B_2M$  per rotazione di  $\pi/2$  attorno a  $M$ .

Se infatti  $A_2$  è il simmetrico di  $A_3$  rispetto a  $M$ , dal Lemma 1 risulta che ruotando di un angolo retto attorno a  $M$  si trasformano  $A_3$  in  $D$ ,  $A_3B_2$  in  $DB_3$ ,  $MA_3$  in  $MD$ , quindi anche  $B_2M$  in  $B_3M$ .|

[20] **Sia  $A_1A_2A_3A_4$  un quadrangolo. Sui 4 lati  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ ,  $A_4A_1$  si costruiscano quattro quadrati (esternamente) e siano rispettivamente  $B_3$ ,  $B_4$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  i loro centri. Se  $M$  è il punto medio di  $A_2A_4$  allora la rotazione di un angolo retto attorno a  $M$  trasforma  $B_4B_2$  in  $B_1B_3$ .**

Infatti, se  $M$  è il punto medio di  $A_2A_4$ , applicando i lemmi precedenti ai triangoli  $A_1A_2A_4$  e rispettivamente  $A_3A_2A_4$  (e ai parallelogrammi da essi individuati) si trova che la rotazione di  $\pi/2$  attorno a  $M$  trasforma  $B_2M$  in  $B_3M$ ,  $B_4M$  in  $B_1M$ , quindi anche  $B_2B_4$  in  $B_3B_1$ .|

Si osservi che, oltre all'enunciato originario, abbiamo provato che i due segmenti in questione hanno la stessa lunghezza. Per analogia con il teorema di Cavalieri-Torricelli, ci si potrebbe chiedere se esista una ragionevole funzione del quadrangolo per cui quella lunghezza  $|B_2B_4|=|B_1B_3|$  possa interpretarsi come un minimo.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) COXETER, H.S.M. *Introduction to Geometry*, J.Wiley, New York, 1961
- (2) KAZARINOFF, N.D. *Disuguaglianze geometriche*, Zanichelli, 1973.