PROBLEMI

Soluzioni a cura di S.Iacino, A.Lanza, S. Savarino

PROBLEMA 1

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{9a}{4(x-1)^4} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

- Discutere segno e continuità della funzione f_a al variare del parametro a. Dimostrare che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a ammette un punto di massimo assoluto di ascissa 1.
- Indicata con f la funzione ottenuta da f_a per $a = 2$, stabilire se f è derivabile in $x = 0$. Studiare l'andamento della funzione f specificandone gli asintoti, i punti di flesso e l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalle tangenti sinistra e destra nel punto di non derivabilità. Determinare i valori delle costanti positive h e k tali che, considerata la funzione
  $$g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$$
  si abbia $g(3 - x) = f(x)$ per $x \geq 0$.
- Con un acceleratore di particelle si prepara un fascio di protoni aventi energia cinetica pari a 42 MeV. Per indirizzare tale fascio verso un bersaglio desiderato, si utilizza un campo magnetico uniforme, ortogonale alla traiettoria dei protoni, di intensità $0{,}24$ T. Trascurando gli effetti relativistici, descrivere il moto di ciascun protone all'interno del campo e calcolare il raggio di curvatura della traiettoria.
- Il fascio di protoni, all'uscita della zona in cui è presente $\vec{B}$, viene fatto penetrare in acqua. Si indichi con $\mathcal{E}(x)$ l'energia del protone, espressa in megaelettronvolt (MeV), dopo x centimetri (cm) di cammino in acqua e sia $d\mathcal{E}$ l'energia ceduta all'acqua dal protone nel tratto dx. Supponendo che la funzione $y = -\frac{d\mathcal{E}}{dx}$ possa essere approssimata con la funzione $y = g(x)$, ponendo $h = 9/2$ e $k = 1$, calcolare l'energia $\mathcal{E}$ assorbita dall'acqua nei primi 3 centimetri di cammino del protone.

Soluzione

1. Studiamo il segno della funzione

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) & se\ x \geq 0 \\ \frac{9a}{4(x-1)^4} & se\ x < 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $a \in R$.

Se $a = 0$ allora

$$f_0(x) = \frac{9}{2}(1 + xe^{-x}) \quad se\ x \geq 0$$

è una funzione sempre positiva per $x \geq 0$, mentre

$$f_0(x) = 0 \qquad se\ x < 0$$

Se $a > 0\ oppure\ a < 0$

$$f_a(x) = \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) \qquad se\ x \geq 0$$

è una funzione sempre positiva per $x \geq 0$

mentre se $a > 0$

$$f_a(x) = \frac{9a}{4(x-1)^4} \qquad se\ x < 0$$

è sempre positiva

e se $a < 0$

$$f_a(x) = \frac{9a}{4(x-1)^4} \qquad se\ x < 0$$

è sempre negativa.

Studiamo ora la continuità della funzione data: $f_a(x)$ è continua per $x > 0$ e per $x < 0$; verifichiamo per quale valore del parametro a è continua anche per $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) = \lim_{x \to 0^-} \frac{9a}{4(x-1)^4}$$

$$\frac{9}{2} = \frac{9a}{4} \quad \rightarrow \quad a = 2$$

Dimostriamo ora che la funzione data ammette un solo punto di massimo assoluto di ascissa x = 1:

$$f_a{}'(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}e^{a-x}(1-x) & se\ x \geq 0 \\ \frac{-9a}{(x-1)^5} & se\ x < 0 \end{cases}$$

Possiamo osservare che la funzione $f_a(x)$ è sempre derivabile per $x > 0$ e per $x < 0$, mentre non lo è per $x = 0$ in quanto

$$Se\ a \neq 0 \qquad f_a(x)\ \text{è}\ discontinua\ in\ x = 0$$

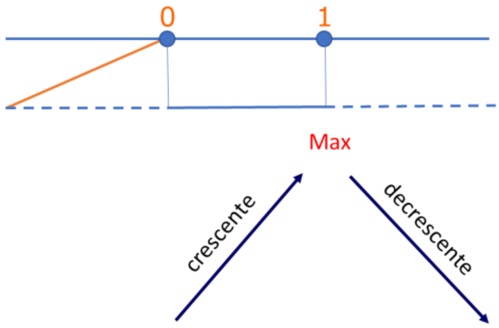
$$Se\ a = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{9}{2} e^{2-x}(1-x) \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{-18}{(x-1)^5}$$

$$\frac{9}{2} e^2 \neq 18$$

e il punto $x = 0$ è un punto angoloso in cui i coefficienti angolari delle tangenti destra e sinistra sono valori finiti ma diversi tra loro.

Inoltre, la funzione ammette un massimo relativo solo per x = 1

$$\frac{9}{2} e^{a-x}(1-x) \geq 0 \quad se \quad 0 \leq x \leq 1$$



mentre la derivata del ramo sinistro

$$\frac{-9a}{(x-1)^5} \quad se\ x < 0$$

non si annulla mai per nessun valore di x, e:

$$\begin{cases} se \quad a > 0 \quad il\ ramo\ di\ curva\ \text{è}\ sempre\ crescente \\ se \quad a < 0 \quad il\ ramo\ di\ curva\ \text{è}\ sempre\ decrescente \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{9a}{4(x-1)^4} = 0$$

Tale massimo relativo

$$Max\left(1\,, \frac{9}{2}(1+e^{a-1})\right)$$

è anche assoluto poiché

$$f_a(1) = \frac{9}{2}(1+e^{a-1}) > \frac{9}{2}$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) = \frac{9}{2} \quad \textit{la retta } y = \frac{9}{2} \text{ è } \textit{asintoto orizzontale destro}$$

2. Se $a = 2$ la funzione diventa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{2-x}) & se\ x \geq 0 \\ \frac{9}{2(x-1)^4} & se\ x < 0 \end{cases}$$

Come si è già detto prima in generale, la funzione f(x) è continua per x = 0 ma non è qui derivabile e per x = 0 si ha un punto angoloso in cui i coefficienti angolari delle tangenti destra e sinistra sono valori finiti ma diversi tra loro:

$$\frac{9}{2}e^2 \neq 18$$

Il punto angoloso è quindi

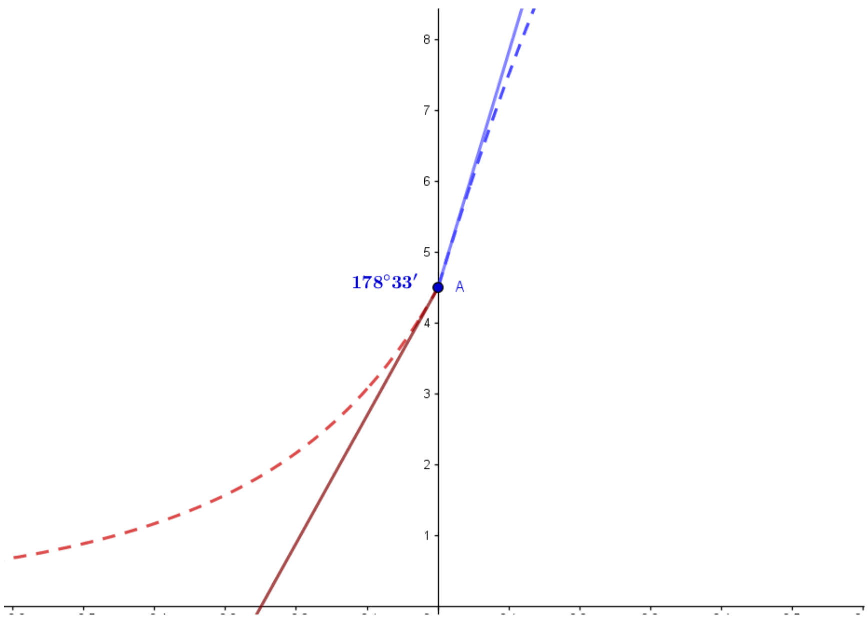
$$\left(0, \frac{9}{2}\right)$$

e le tangenti destra e sinistra hanno le seguenti equazioni:

$$y = \frac{9}{2}e^2 x \quad se\ x \geq 0 \quad e \quad y = 18x \quad se\ x < 0$$

L'ampiezza dell'angolo α formato dalle due semirette tangenti è tale che:

$$|tg\alpha| = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\frac{9}{2}e^2 - 18}{1 + 81e^2}\right| \approx 0{,}025 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 1°\,26' \\ \alpha = 178°\,33' \end{cases}$$



Come si può osservare dal seguente grafico delle due semirette tangenti, l’angolo α tra le due semirette è quello ottuso.

Completiamo lo studio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{2-x}) & se\ x \geq 0 \\ \frac{9}{2(x-1)^4} & se\ x < 0 \end{cases}$$

Ricordando che è sempre positiva, ha un asintoto orizzontale destro di equazione $y = \frac{9}{2}$ e ricercando altri asintoti:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{9}{2(x-1)^4} = 0 \quad la\ retta\ di\ equazione\ y = 0\ \text{è}\ asintoto\ orizzontale\ sinistro$$

L’ordinata del punto di massimo è:

$$f(1) = \frac{9}{2}(1 + e^1) \approx 17$$

pertanto, il massimo della funzione è

$$Max(1\ ,17)$$

Facciamo ora la ricerca dei flessi a tangente obliqua:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}e^{2-x}(1-x) & se\ x \geq 0 \\ \frac{-18}{(x-1)^5} & se\ x < 0 \end{cases}$$

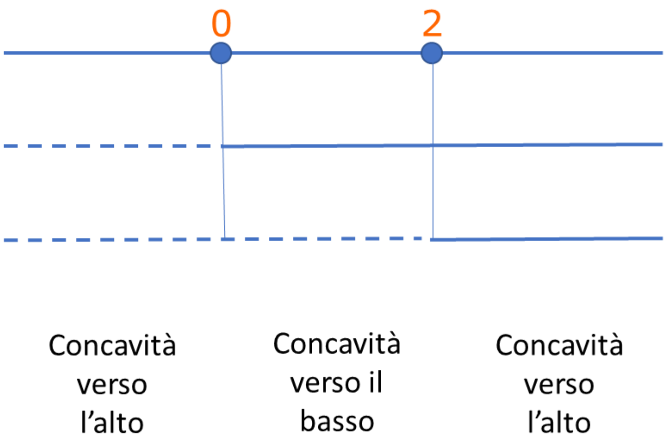
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}e^{2-x}(x-2) & se\ x \geq 0 \\ \frac{90}{(x-1)^6} & se\ x < 0 \end{cases}$$

Poiché

$$\frac{90}{(x-1)^6} > 0 \quad \forall\, x < 0$$

la funzione $f(x)$ $per\ x < 0$ volge la concavità verso l'alto, mentre l'unico punto di flesso si ha per $x = 2$, infatti:

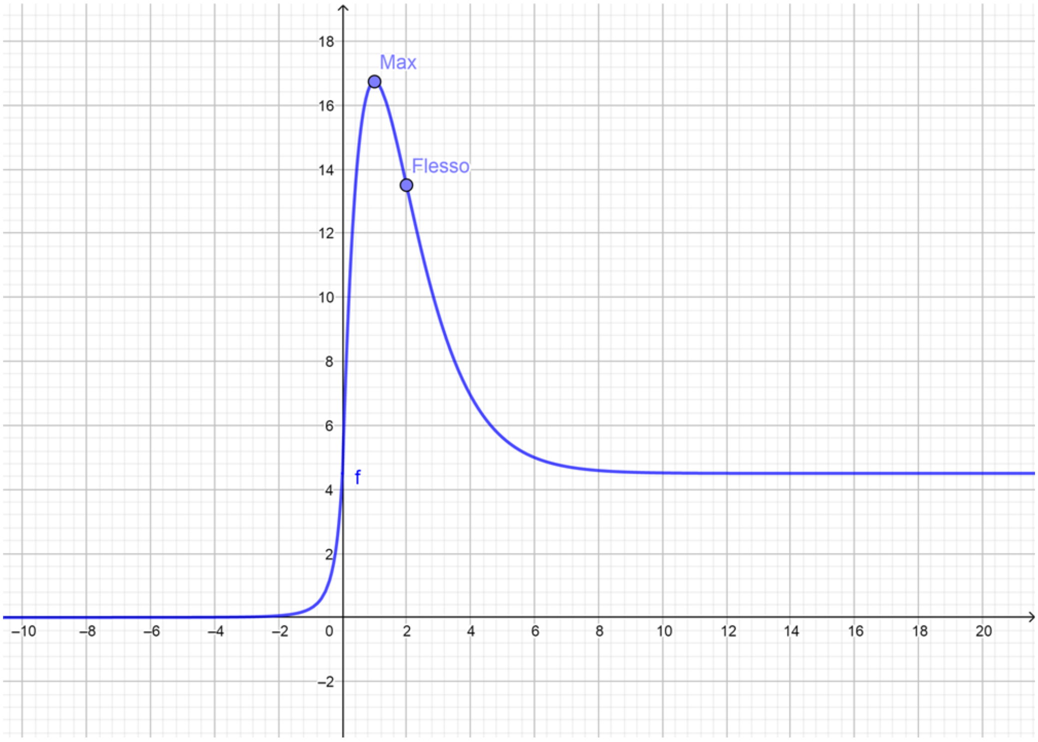
$$\frac{9}{2}e^{2-x}(x-2) \geq 0 \ \ se \ \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$



Quindi il punto di flesso ha coordinate

$$Flesso\left(2, \frac{27}{2}\right)$$

pertanto, il grafico della funzione è il seguente:



Consideriamo ora la funzione

$$g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$$

e determiniamo i valori delle costanti positive h e k in modo che

$$g(3 - x) = f(x) \quad per\ x \geq 0$$

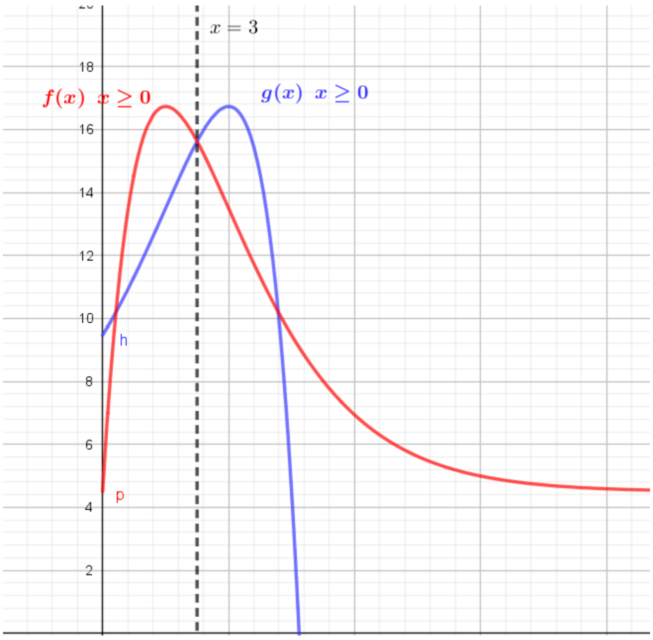
$$h[1 + (3 - 3k + kx)e^{3k-kx-1}] = \frac{9}{2}(1 + xe^{2-x}) \quad \rightarrow$$

$$h + h(3 - 3k + kx)e^{3k-kx-1} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}xe^{2-x} \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} h = \dfrac{9}{2} \\ 3 - 3k = 0 \end{cases} \qquad solo\ se \qquad \begin{cases} k = 1 \\ h = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{9}{2}[1 + (3 - x)e^{x-1}]$$

Significato geometrico: il grafico di $f(x)$, $per\ x \geq 0$, si ottiene da quello di $g(x)$ con una simmetria rispetto alla retta $x = 3$.



3.

Consideriamo ora un fascio di protoni; ogni protone ha energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}m_p v^2 = 42\ MeV = 42 \cdot 10^6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} J = 42 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13} J = 6{,}73 \cdot 10^{-12} J$$

Inoltre

$$m_p = 1{,}7 \cdot 10^{-27} kg$$

$$q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$$

e quindi

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-12}}{1{,}7 \cdot 10^{-27}}} = \sqrt{7{,}9 \cdot 10^{15}} = 8{,}9 \cdot 10^7 m/s$$

Il moto di ciascun protone è un moto circolare uniforme in quanto la forza di Lorentz induce la carica a percorrere una traiettoria circolare, infatti la forza magnetica funge da forza centripeta che modifica solo la direzione della velocità di ciascun protone.
Pertanto, dalla seconda legge della dinamica possiamo scrivere:

$$F_L = m \cdot a$$

$$qvB = m_p \frac{v^2}{R}$$

da cui il raggio di curvatura è

$$R = \frac{m_p v}{qB} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-27} \cdot 8{,}9 \cdot 10^7}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}24} = \frac{1{,}7 \cdot 8{,}9}{1{,}6 \cdot 2{,}4} \approx 3{,}9\, m$$

4.

La forza di Lorentz è perpendicolare alla velocità del protone e quindi al suo spostamento istantaneo, per cui il lavoro compiuto dalla forza magnetica è nullo; dal Teorema dell'energia cinetica, poiché il lavoro compiuto dalla forza magnetica è uguale alla variazione di energia cinetica possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2} m_p {v_f}^2 - \frac{1}{2} m_p {v_i}^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad v_f = v_i$$

cioè la forza di Lorentz non cambia il modulo della velocità del protone, pertanto l'energia con cui ciascun protone esce dal campo magnetico ed entra nell'acqua è sempre

$$K = \frac{1}{2} m_p v^2 = 42\, MeV = 6{,}7 \cdot 10^{-12} J = \varepsilon(0)$$

La funzione $\varepsilon(x)$ rappresenta l'energia del protone dopo x cm di cammino , mentre la corrispondente energia assorbita dall'acqua è uguale a $\varepsilon_{ass}(x) = \varepsilon(0) - \varepsilon(x)$

La funzione $y = -\frac{d\varepsilon}{dx}$ è uguale all'opposto della derivata di $\varepsilon(x)$ ovvero alla derivata di $\varepsilon_{ass}(x)$

Supponiamo che tale funzione sia rappresentata da

$g(x) = \frac{9}{2}[1 + (3 - x)e^{x-1}]$ che è positiva per $0 \leq x \leq 3$.

Ne consegue che $\varepsilon(x)$ è una funzione decrescente mentre $\varepsilon_{ass}(x)$ è una funzione crescente.

Per determinare l'energia $\varepsilon(x)$ del protone dopo x cm di cammino del protone, possiamo risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} -\dfrac{d\varepsilon}{dx} = \dfrac{9}{2}[1 + (3 - x)e^{x-1}] \\ \varepsilon(0) = 42\, MeV \end{cases}$$

I valori di $g(x)$ si misurano in $\frac{MeV}{cm}$ e integrando in dx che è misurato in cm si ottiene una energia misurata in MeV .

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili, per cui

$$\int d\varepsilon = -\int \frac{9}{2}[1 + (3 - x)e^{x-1}]dx + c$$

$$\varepsilon(x) = -\frac{9}{2}x - \frac{9}{2}\int (3 - x)e^{x-1}dx + c$$

$$\varepsilon(x) = -\frac{9}{2}x - \frac{9}{2}\left[(3-x)e^{x-1} + \int e^{x-1}dx\right] + c$$

$$\varepsilon(x) = -\frac{9}{2}x - \frac{9}{2}[(3-x)e^{x-1} + e^{x-1}] + c$$

$$\varepsilon(x) = -\frac{9}{2}x - \frac{9}{2}(4-x)e^{x-1} + c \qquad espressa\ in\ MeV$$

In effetti, per calcolare $\varepsilon(x)$ è sufficiente che lo studente abbia chiaro il concetto di integrale indefinito, dove la condizione iniziale serve a trovare la costante arbitraria c.

Poiché

$$\varepsilon(0) = 42\ MeV \quad c = 42 + 18e^{-1} \approx 48{,}62\ \ MeV$$

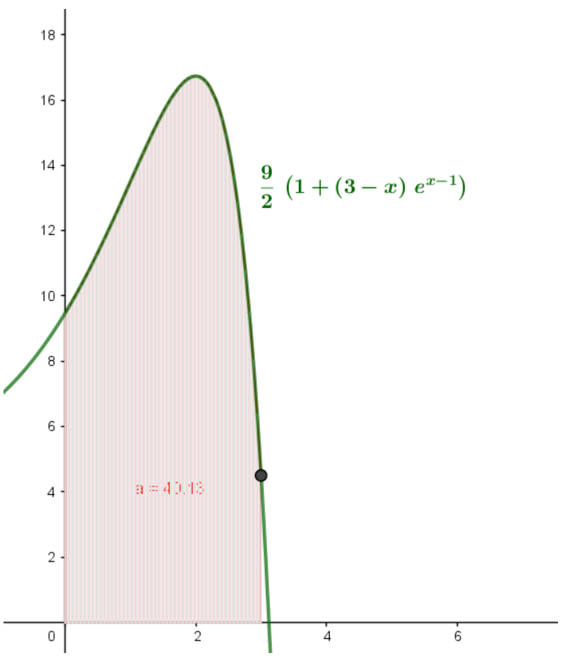
Se lo spostamento del protone nell'acqua è di 3 cm allora

$$\varepsilon(3) = \left\{-\frac{9}{2}\cdot 3 - \frac{9}{2}[(4-3)e^{3-1}]\right\} + c = 42 + 18e^{-1}\ - \frac{27}{2} - \frac{9}{2}e^2 \approx 1{,}87\ MeV$$

Di conseguenza l'energia assorbita dall'acqua dopo 3 cm è $40{,}13\ MeV \quad circa$

Si può arrivare rapidamente al risultato utilizzando il concetto di funzione integrale:

$$\Delta\varepsilon_{ass}(x) = \int_0^x g(x)dx \quad \rightarrow \ \Delta\varepsilon_{ass}(3) \ = \int_0^3 g(x)dx = \frac{27}{2} + \frac{9}{2}e^2 - 18e^{-1} \ \approx \ 40{,}13\ MeV$$



PROBLEMA 2

Due cariche elettriche puntiformi $Q_1 = q$ (con q positivo) e $Q_2 = -q$ sono collocate rispettivamente nei punti A e B, posti ad una distanza $2k$. Le cariche sono espresse in coulomb (C) e le distanze in metri (m). Si indichi con r la retta passante per i punti A e B.

- Determinare, in un punto C della retta r, l'intensità del campo elettrico generato dalle cariche Q_1 e Q_2, al variare di C su r. Esistono, su tale retta, dei punti nei quali il campo elettrico è nullo? Giustificare la risposta.

- Dimostrare che l'intensità del campo elettrico generato da Q_1 e Q_2 in un punto P posto sull'asse del segmento AB decresce quando P si allontana dal punto medio di AB. Indicata con x la distanza di P dal punto medio di AB, esprimere l'intensità del campo elettrico in P in funzione di x.

- Fissati i parametri reali positivi h e k, studiare l'andamento della funzione
$$f(x) = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{3/2}}$$
individuandone, in particolare, simmetrie, asintoti, estremi e punti di flesso.

- Tra le funzioni del tipo
$$g(x) = \frac{bx}{(x^2 + k^2)^a}$$
con $a, b \in \mathbb{R}$, determinare le primitive di f.
Dimostrare che, se $h = k^2$, la funzione f rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty)$. Quali sono i valori della media e della mediana di tale variabile aleatoria?

Soluzione

1. Fissato un riferimento cartesiano in cui l'asse delle y sia la retta AB, con l'origine nel punto medio di AB , in modo che i punti A e B abbiano coordinate rispettivamente $A(0; -k)$ e $B(0; k)$, sia C un punto di coordinate $(0; y)$; si ha $\overline{AC} = |y + k|$ e $\overline{BC} = |y - k|$.

Il campo $\overrightarrow{E_1}$ generato da Q_1

- ha intensità pari a $\left|K \frac{q}{(y+k)^2}\right|$ dove K è la costante di Coulomb
- ha sempre verso centrifugo rispetto al punto A, quindi
- è diretto verso l'alto se $y > -k$, verso il basso se $y < -k$

Il campo $\overrightarrow{E_2}$ generato da Q_2

- ha intensità pari a $\left|K \frac{-q}{(y-k)^2}\right|$
- è sempre diretto verso il punto B, quindi verso l'alto se $y < k$ verso il basso se $y > k$

Il campo risultante

Se $\boldsymbol{y < -k}$ ha per intensità la differenza delle intensità dei due vettori componenti, i quali risultano tra loro discordi, ed è **diretto verso il basso** in quanto $E_1 > E_2$ (il punto C ha minore distanza da A)

$$E_1 - E_2 = Kq\left(\frac{1}{(y+k)^2} - \frac{1}{(y-k)^2}\right) = Kq\frac{-4kx}{(y^2-k^2)^2} = -\boldsymbol{K}\frac{\boldsymbol{4kqx}}{(\boldsymbol{y^2-k^2})^2}$$

Se $-\boldsymbol{k} < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{k}$ è diretto verso l'alto e ha per intensità la somma delle intensità dei due vettori componenti i quali risultano tra loro concordi e diretti entrambi verso l'alto,

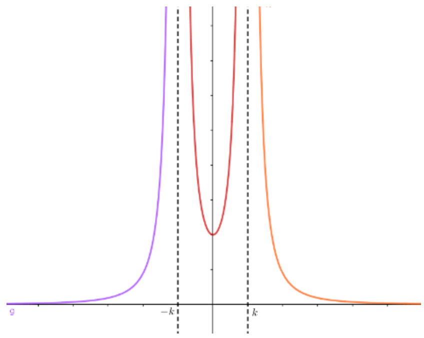
$$E_1 + E_2 = Kq\left(\frac{1}{(y+k)^2} + \frac{1}{(y-k)^2}\right) = \boldsymbol{Kq}\frac{2(\boldsymbol{y^2+k^2})}{(\boldsymbol{y^2-k^2})^2}$$

Se $y > k$ ha per intensità la differenza delle intensità dei due vettori componenti, i quali risultano tra loro discordi, ed è diretto **verso il basso** in quanto $E_2 > E_1$ (il punto C ha minore distanza da B)

$$E_2 - E_1 = Kq\left(\frac{1}{(y-k)^2} - \frac{1}{(y+k)^2}\right) = Kq\frac{4ky}{(y^2-k^2)^2}$$

Per l'intensità del campo $\vec{E}$ risultante possiamo scrivere la seguente funzione di cui, a fianco è visualizzato il grafico (non richiesto)

$$= \begin{cases} -K\dfrac{4kqy}{(y^2-k^2)^2} & y < -k \\ Kq\dfrac{2E(y^2+k^2)}{(y^2-k^2)^2} & -k < y < k \\ Kq\dfrac{4ky}{(y^2-k^2)^2} & y > k \end{cases}$$



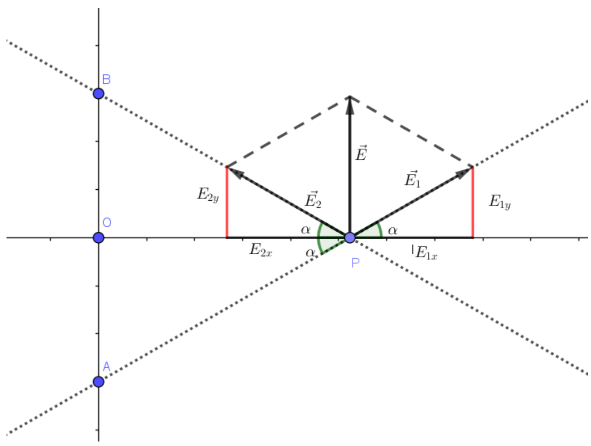
Dall'espressine di $E(y)$ si evince che non si annulla mai.

Del resto, non esiste alcun punto in cui il campo è nullo in quanto i due vettori $\overrightarrow{E_1}$ e $\overrightarrow{E_2}$ non hanno mai risultante nulla. Infatti, nei punti in cui hanno verso opposto non possono avere uguale intensità essendo diverse le distanze dai punti A e B.

2. Nello stesso riferimento cartesiano introdotto nel punto precedente, l'asse del segmento AB è asse delle x.

Sia P un punto di coordinate $(x; 0)$, equidistante da A e da B sia 2α è l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{P}B$

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \sqrt{x^2+k^2} \qquad \sin\alpha = \frac{k}{\sqrt{x^2+k^2}}$$



Il campo elettrico $\overrightarrow{E_1}$ generato da Q_1 e il campo elettrico $\overrightarrow{E_2}$ generato da Q_2 hanno uguale intensità.

Si ha

- $E_1 = E_2 = K\frac{q}{\sqrt{x^2+k^2}}$
- $E_{1x} = -E_2x$
- $E_{1y} = E_{2y}$

Il vettore risultante $\vec{E}$ ha componente orizzontale nulla pertanto ha la direzione dell'asse y e intensità uguale a

$$E = 2E_{1y} = 2E_{2y} = 2K\frac{q}{\sqrt{x^2+k^2}}\sin\alpha = 2K\frac{kq}{\sqrt{(x^2+k^2)^3}}$$

Il valore di E è uguale alla lunghezza della diagonale del parallelogramma (in questo caso un rombo) parallela all'asse y. Allontanando il punto P dall'origine O, aumentano anche le distanze AP e PB e quindi

diminuisce l'intensità dei due campi componenti. Nel rombo diminuisce la lunghezza dei lati mentre l'angolo di vertice P tende a diventare un angolo piatto, pertanto decresce la lunghezza della diagonale considerata .

Dall'espressione analitica della funzione si evince che è decrescente al crescere di $|x|$ in quanto il denominatore aumenta mentre il numeratore rimane costante.

3. Studio della funzione

$$f(x) = \frac{h}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{con } h > 0 \quad k > 0$$

$f(x)$ è definita in R

$f(x) > 0 \quad \forall x \in$ R

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \to$ l'asse x è un asintoto orizzontale

È una funzione pari, quindi simmetrica rispetto all'asse y

Studio della derivata prima e della monotonia della funzione

$$f'(x) = -\frac{3hx}{(x^2+k)^{\frac{5}{2}}} \qquad f'(0) = 0$$

Dallo studio del segno di $f'(x)$ si evince che il punto $M(0;\frac{h}{k^3})$ è un massimo relativo e assoluto

$f'(x) > 0$ ++++++++++++0------------------

Poiché $f(x)$, per un opportuno valore di h rappresenta l'andamento dell'intensità del campo elettrico $\vec{E}$ di cui al punto 2), possiamo affermare che i risultati confermano quanto si era detto sull'andamento di E al variare di x : per $x > 0$ decresce al crescere di x, per $x < 0$ la funzione decresce se decresce anche x , cioè se x assume valori negativi con maggiore valore assoluto

Studio della derivata seconda e della concavità della funzione

$$f''(x) = \frac{3h(4x^2 - k^2)}{(x^2 + k^2)^{\frac{7}{2}}}$$

In quanto

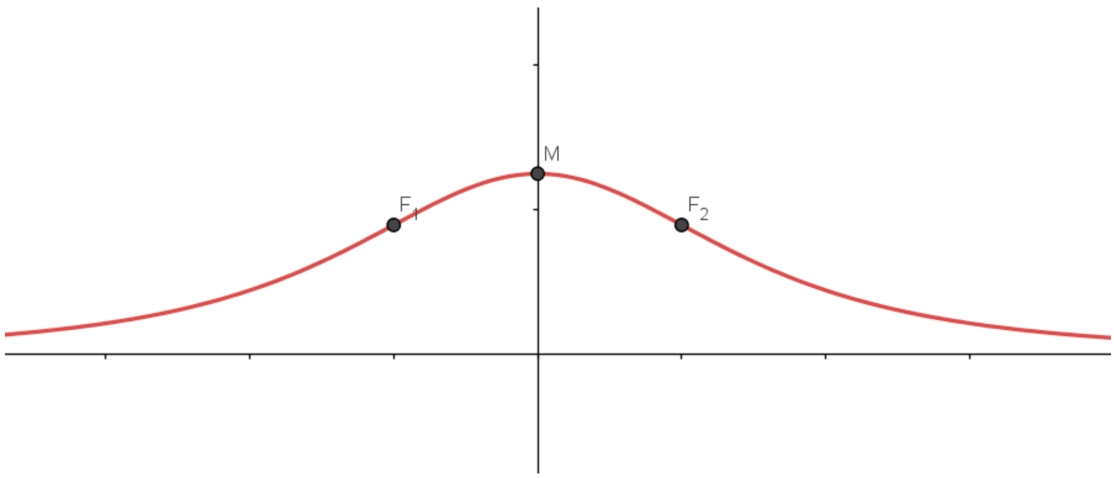
$$f"(x) = 3h\left(\frac{-1}{(x^2 + k^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{5}{(x^2 + k^2)^{\frac{7}{2}}}\right) = 3h\,\frac{-x^2 - k^2 + 5x^2}{(x^2 + k^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$f''(x)$ ammette due zeri, di ascissa $-\frac{k}{2}$ e $\frac{k}{2}$ rispettivamente ed è positiva negli intervalli ad essi esterni

$f"(x) > 0$ $\quad +++++++++++-\frac{k}{2}------------------\frac{k}{2}+++++++++++++$

Il grafico di f(x) è convesso per $x < -\frac{k}{2}$ $\cup$ $x > \frac{k}{2}$, è concavo per $-\frac{k}{2} < x < \frac{k}{2}$

I punti $F_1(-\frac{k}{2}; \frac{8\sqrt{5}h}{25k^3})$ $F_2(\frac{k}{2}; \frac{8\sqrt{5}h}{25k^3})$ sono due flessi, simmetrici rispetto all'asse y.



4. La funzione $f(x) = \frac{h}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$ è continua in R , quindi ammette primitive

$g(x) = \frac{bx}{(x^2+k^2)^a}$ è derivabile ed è una primitiva di $f(x)$ se $g'(x) = f(x)$

Poiché $g'(x) = \frac{b(k^2-(2a-1)x^2)}{(x^2+k^2)^{a+1}}$, affinché le due funzioni siano identiche il numeratore di $g'(x)$ deve essere una costante oppure il prodotto di una costante per un'opportuna potenza del binomio $(x^2 + k^2)$

Nel primo caso dobbiamo imporre che le due frazioni (irriducibili) abbiano identico numeratore e identico denominatore

$$\begin{cases} 2a-1= & 0 \\ bk^2= & h \\ a+1= & \frac{3}{2} \end{cases}$$

Il sistema ammette soluzioni $\begin{cases} a= & \frac{1}{2} \\ b= & \frac{h}{k^2} \end{cases}$

Nel secondo caso dobbiamo imporre che la frazione possa essere semplificata, essendo

$$\begin{cases} 2a-1= & -1 \\ b= & h \\ a+1= & \frac{5}{2} \end{cases}$$

Il sistema non ammette soluzioni

I valori di a e b per cui $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$ sono

$$\begin{cases} a= & \frac{1}{2} \\ b= & \frac{h}{k^2} \end{cases}$$

Pertanto, $g(x)=\frac{h}{k^2}\frac{x}{\sqrt{h^2+k^2}}$ è una primitiva di f(x) avente la forma richiesta.

Se $h=k^2$ la funzione $f(x)$ $assume\ la\ forma$ $\frac{k^2}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$ e la primitiva g(x) diventa $\frac{x}{\sqrt{h^2+k^2}}$

Una variabile aleatoria X continua è descritta da una funzione ρ(x) detta densità di probabilità, tale che

$\rho(x) \geq 0 \quad \forall x \in R$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$

$$\int_a^b \rho(x)dx = P(a \leq X \leq b)$$

Possiamo definire la variabile aleatoria X che abbia densità di probabilità

$$\rho(x)=\begin{cases} \frac{k^2}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \leq x < +\infty \\ 0 & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

dopo aver verificato che sono soddisfatte le prime due condizioni

$\rho(x) \geq 0$ Vero

Verifichiamo la seconda condizione

$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{k^2}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+k^2}} - 0\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{x^2}}}$ =1 Verificato

Il valor medio $M(X)$ è uguale a $\int_0^{+\infty} x \frac{k^2}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ se il suddetto integrale esiste ed è finito

Calcoliamo prima l'integrale indefinito $\int \frac{k^2 x}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = k^2 \int \left(h(x)\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{h'(x)}{2} dx$

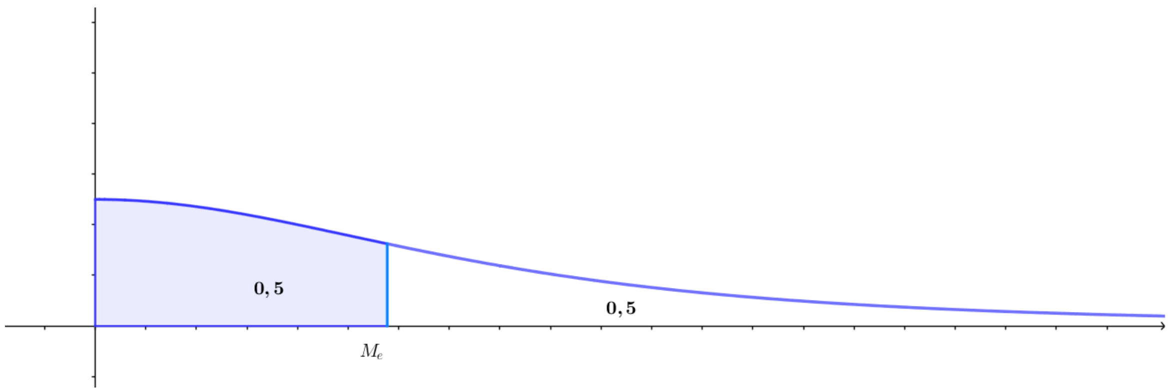
dove $h(x) = x^2 + k^2$

$= -k^2 \cdot \frac{1}{2}\, h(x)^{-\frac{1}{2}}$ + c $= -k^2\,(x^2+k^2)^{-\frac{1}{2}}$ + c

$$M(X) = \int_0^{+\infty} \frac{k^2 x}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \left[-\frac{k^2}{\sqrt{x^2+k^2}}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{k^2}{\sqrt{x^2+k^2}} + k\right] = k$$

La mediana della distribuzione è quel numero $m > 0$ tale che

$\int_0^m \frac{k^2}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_m^{+\infty} \frac{k^2}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{2}$



$\int_0^m \frac{k^2}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{m}{\sqrt{m^2+k^2}} = \frac{1}{2} \to \quad 4m^2 = m^2 + k^2 \to 3m^2 = k^2 \to \quad m = \frac{k}{3}\sqrt{3}$ avendo accettato solo la soluzione positiva.

APPROFONDIMENTO

Nel punto 4 si può procedere calcolando l'integrale indefinito

$$\int \frac{h}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

con la sostituzione $x = k\tan u \rightarrow dx = k\frac{1}{cos^2 u}du$

$$hk\int \frac{cos^3 u}{k^3}\frac{1}{cos^2 u}du = \frac{h}{k^2}\int \cos u\, du = \frac{h}{k^2}\sin u + c$$

poiché $\sin u = \frac{\tan u}{\sqrt{1+(\tan u)^2}}$ possiamo ritornare alla variabile x

$\int \frac{h}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{h}{k^2}\frac{kx}{k\sqrt{k^2+x^2}}$ +c $= \frac{hx}{k^2\sqrt{k^2+x^2}}$ $+ c$

Come si può osservare, per $c = 0$ si trova una primitiva di $f(x)$ del tipo $g(x) = \frac{bx}{(x^2+k^2)^a}$ che coincide con la funzione precedentemente determinata.