Tema: Indovina il numero

di Antonino Giambò

Da ragazzo, in occasione del conseguimento di quella che allora si chiamava “licenza media”, un mio zio mi regalò una scatola contenente alcuni giochini. Tra questi un mazzetto di 6 cartelle con numeri inseriti in apposite caselle, come riportato in figura.

A

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49
51	53	55	57	59
61	63			

B

2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
22	23	26	27	30
31	34	35	38	39
42	43	46	47	50
51	54	55	58	59
62	63			

C

4	5	6	7	12
13	14	15	20	21
22	23	28	29	30
31	36	37	38	39
44	45	46	47	52
53	54	55	60	61
62	63			

D

8	9	10	11	12
13	14	15	24	25
26	27	28	29	30
31	40	41	42	43
44	45	46	47	56
57	58	59	60	61
62	63			

E

16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	61
62	63			

F

32	33	34	35	36
37	38	39	40	41
42	43	44	45	46
47	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	61
62	63			

Con queste cartelle si fa un gioco che vede coinvolti un “conduttore” e un “concorrente”.

Il gioco consiste nel far scegliere al concorrente un numero fra quelli presenti nelle 6 cartelle e di indicare in quali cartelle il numero scelto è presente. Il conduttore indovina immediatamente qual è il numero scelto: gli basta sommare i numeri che sono situati al primo posto nelle cartelle indicate.

Per esempio, se sono indicate le cartelle A, C, F, il numero scelto è 1+4+32=37.

Provare per credere.

In realtà, il gioco è noto a tutti o, perlomeno, ai più. Ma forse non a tutti è nota la spiegazione.

È su questa spiegazione che ci vogliamo soffermare.

Incominciamo a capire come si costruiscono le sei cartelle.

Per questo è necessario costatare anzitutto che ogni cartella ha come primo numero una potenza del numero 2. Ragion per cui si può dire che ciascuna cartella è caratterizzata da una potenza di 2. In particolare:

- la 1ª cartella (A) è caratterizzata dalla potenza di 2 di esponente 0: $2^0=1$;
- la 2ª cartella (B) è caratterizzata dalla potenza di 2 di esponente 1: $2^1=2$;
- …………… ;
- la 6ª cartella (F) è caratterizzata dalla potenza di 2 di esponente 5: $2^5=32$.

A questo punto si scrivono nella cartella caratterizzata dalla potenza di 2 di esponente n (n=0,1,2,3,4,5), in ordine crescente, tutti i numeri da 1 a 63 che, in **rappresentazione binaria**, presentano il numero 1 nella cifra di posto n+1 (contando a partire da destra).

Per comodità, scriviamo nella tabella sottostante tutti i numeri naturali da 1 a 63 in rappresentazione decimale affiancandoli dalle corrispettive rappresentazioni binarie.

1	1	2	10	3	11	4	100	5	101
6	110	7	111	8	1000	9	1001	10	1010
11	1011	12	1100	13	1101	14	1110	15	1111
16	10000	17	10001	18	10010	19	10011	20	10100
21	10101	22	10110	23	10111	24	11000	25	11001
26	11010	27	11011	28	11100	29	11101	30	11110
31	11111	32	100000	33	100001	34	100010	35	100011
36	100100	37	100101	38	100110	39	100111	40	101000
41	101001	42	101010	43	101011	44	101100	45	101101
46	101110	47	101111	48	110000	49	110001	50	110010
51	110011	52	110100	53	110101	54	110110	55	110111
56	111000	57	111001	58	111010	59	111011	60	111100
61	111101	62	111110	63	111111				

Fissata ora l'attenzione sulla 1ª cartella (cartella A, $n=0$), i numeri che la formano sono quei numeri che, in rappresentazione binaria, presentano il numero 1 nella 1ª cifra (contando da destra). Vale a dire tutti i numeri dispari fino al numero 63. Come dire i seguenti numeri, presi a "gruppi" di $\mathbf{2^0=1}$:

1, 3, 5, … , 63,

saltando **1** numero dopo ogni raggruppamento.

Fissata l'attenzione sulla 2ª cartella (cartella B, $n=1$), bisogna prendere i numeri che, in rappresentazione binaria, presentano il numero 1 nella 2ª cifra (a partire da destra). Vale a dire i seguenti numeri, presi a gruppi di $\mathbf{2^1=2}$:

2-3, 6-7, 10-11, … , 62-63,

saltando **2** numeri dopo ogni raggruppamento.

Riguardo alla 3ª cartella (cartella C, $n=2$), bisogna prendere i numeri che, in rappresentazione binaria, presentano il numero 1 nella 3ª cifra da destra. Vale a dire i seguenti numeri, a gruppi di $\mathbf{2^2=4}$:

4-5-6-7, 12-13-14-15, 20-21-22-23, … , 60-61-62-63,

saltando **4** numeri dopo ogni raggruppamento.

Riguardo alla 4ª cartella (cartella D, $n=3$), bisogna prendere i numeri che, in rappresentazione binaria, presentano il numero 1 nella 4ª cifra da destra. Vale a dire i seguenti numeri, a gruppi di $\mathbf{2^3=8}$:

8-9-10-11-12-13-14-15, 24-25-26-27-28-29-30-31, … , 56-57-58-59-60-61-62-63,

saltando **8** numeri dopo ogni raggruppamento.

Riguardo alla 5ª cartella (cartella E, $n=4$), bisogna prendere i numeri che, in rappresentazione binaria, presentano il numero 1 nella 5ª cifra da destra. Vale a dire i seguenti numeri, a gruppi di $\mathbf{2^4=16}$:

16-17-18-19-20-21-22-23-24-25-26-27-28-29-30-31, 48-49-50-51-52-53-54-55-56-57-58-59-60-61-62-63

essendo saltati **16** numeri fra il primo e il secondo raggruppamento.

Riguardo infine alla 6ª cartella (cartella F, $n=5$), bisogna prendere i numeri che, in rappresentazione binaria, presentano il numero 1 nella 6ª cifra da destra. Vale a dire tutti i $\mathbf{2^5=32}$ numeri da 32 a 63.

In realtà, il numero delle cartelle può essere minore o addirittura maggiore.

Per esempio, se esse sono 5, i numeri con i quali sono costruite possono arrivare fino a $2^5-1=31$.

Se sono 7, i numeri con i quali esse sono costruite possono arrivare fino a $2^7-1=127$, mentre la 7ª cartella (cartella G, $n=6$) incomincia con $2^6=64$.

Se le cartelle sono 8, i numeri con cui sono costruite possono arrivare a $2^8-1=255$, mentre l'8ª cartella (cartella H, $n=7$) inizia con $2^7=128$.

E così via.

Una volta compilate le cartelle, se il numero scelto figura, per dire, nelle cartelle C ($n=2$, $2^2=4$), E ($n=4$, $2^4=16$), F ($n=5$, $2^5=32$), questo significa che il numero scelto presenta, in rappresentazione binaria, la cifra 1 nei posti 3°, 5° e 6°, contando da destra. Per esclusione, negli altri posti 1°, 2° e 4°, contando sempre da destra, il numero scelto presenta la cifra 0. Il numero scelto è pertanto il seguente:

$$110100 = 52_2.$$

Ed è esattamente uguale alla somma dei numeri 4, 16, 32, che caratterizzano le cartelle C, E, F nell'ordine.

Lo stesso vale per ogni altra scelta.

Ed è questo che si voleva spiegare.

Riferimenti bibliografici.

[1] Italo Ghersi, *Matematica dilettevole e curiosa*, Milano, Hoepli, 1988.

[2] Ennio Peres, *L'elmo della mente*, Milano, RBA Italia, 2008.