Proposta di Adriana Lanza

Esami di Stato – Indirizzo di Liceo Scientifico – Seconda prova scritta

TEMA: Il significato geometrico della derivata

## PARTE PRIMA

Sia $P_0\ (x_0; f(x_0))$ un punto del grafico della funzione $f$ supposta derivabile in $x_0$.

Si definisce retta tangente al grafico di $f$ nel punto $P_0$ la retta $t$ passante per $P_0$ e avente coefficiente angolare $f'(x_0)$.

**1.** Estendere la definizione di retta tangente al caso in cui risulta

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=+\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-\infty$$

**2.** Considerate le tre funzioni

$$\text{a) } f(x)=\sqrt{x} \qquad \text{b) } g(x)=\sqrt{|x|} \qquad \text{c) } h(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$$

si dica se esiste la retta tangente al loro grafico nel punto di ascissa 0. Motivare la risposta.

**3.** Nel fascio di cubiche di equazione:

$$y=\frac{kx^2}{x^2+1}$$

si indichi con $\gamma$ quella che nel suo punto di ascissa 1 ha per tangente una retta $t$ di coefficiente angolare uguale a 1 e se ne tracci il grafico dopo averne determinato, in particolare, gli eventuali estremi relativi e flessi.

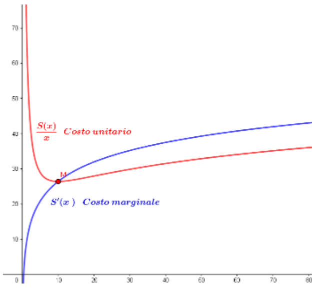
La curva $\gamma$ ammette massimo o minimo assoluto?

Esistono altri punti di $\gamma$ in cui la tangente è ancora la retta $t$? Quanti sono i punti di $\gamma$ in cui la retta tangente ha la stessa inclinazione di t, ovvero coefficiente angolare 1? Giustificare le risposte.

## PARTE SECONDA

**4.** Si dimostri la seguente proprietà delle *curve di costo*:

Sia S(x) una funzione, definita e derivabile in un insieme A ,che rappresenti la funzione “Costo totale” la funzione che mette in relazione i costi di produzione con la quantità x di bene prodotto.




Sia $\mathrm{f(x)}=\frac{\mathrm{S(x)}}{\mathrm{x}}$ definita in $\mathrm{A}-\{0\}$ la funzione “costo unitario”.

*Se $f(x)$ ha un minimo relativo in $x_0$ interno all’intervallo di definizione, allora il punto di coordinate $(x_0; f(x_0))$ è punto di incontro tra il grafico di $S'(x)$, che prende il nome di costo marginale, e quello di $f(x)$.*

Con riferimento alla figura a lato, per quali valori di x l’aumento della spesa totale corrispondente ad un‘unità aggiuntiva del prodotto è inferiore al corrispondente costo medio unitario? Per quali è maggiore?

**5.** Due cariche positive uguali sono vincolate una nel punto A, l'altra nel punto B posto a distanza $2d$ da A.

Introdotto un sistema di ascisse sulla retta AB, con origine nel punto medio O di AB , si determini, in un generico punto interno al segmento AB, il potenziale elettrico $V(x)$ e da quest'ultimo si ricavi l'espressione della componente $E_x(x)$ del campo elettrico risultante. Dopo aver verificato che $E_x(x) = 0$ nel punto in cui $V(x)$ ha un minimo, si discuta la stabilità dell'equilibrio di una terza carica, anch'essa vincolata a muoversi sull'asse $x$, situata nel punto considerato.

**PARTE TERZA**

**Rispondere alle domande relative alle seguenti letture 1 e 2:**

**1. Il significato geometrico della derivata seconda**

La derivata seconda ha importanza anche in analisi e in geometria , perché $f''(x)$ , che esprime la variazione del coefficiente angolare $f'(x)$ della curva $y = f(x)$ , dà un'indicazione di come questa è incurvata .

Se in un intervallo $f''(x)$ é positiva, è positiva la variazione di $f'(x)$. Una variazione positiva di una funzione significa che la funzione cresce al crescere di $x$. Perciò $f''(x) > 0$ significa che l'inclinazione cresce al crescere di $x$, di modo che la curva tende a diventare più ripida dove ha un coefficiente angolare positivo e meno ripida dove lo ha negativo. Diremo che la curva è concava verso l'alto.

Analogamente , se $f''(x) < 0$, la curva a $y = f(x)$ è concava verso il basso.

[Da R.Courant - H.Robbins, "Che cos'è la matematica?, Bollati Boringhieri]

Domanda 1.

Dare un'interpretazione del testo studiando le derivate seconde di $f(x) = x^2$ e di $g(x) = x^3$ nei punti di ascissa $x = 0, x = -1, x = 1$.

Disegnare le due curve con le rispettive tangenti nei punti indicati. Cosa si può dire della posizione della curva rispetto alla tangente, in ciascuno dei casi considerati?

Qual è la relazione tra la concavità o la convessità della curva e la posizione rispetto alla retta tangente?

Domanda 2

Una barca si muove sotto l'azione della forza costante fornita dal motore e quella della resistenza dell'acqua che cresce (in modulo) con la velocità.

Sapendo che l'espressione della velocità in funzione del tempo è $v(t) = v_0(1 - e^{-\frac{t}{k}})$ dove $v_0$ $e$ $k$ sono due costanti il cui valore è $5\,\frac{m}{s}$ e $25\ s$ rispettivamente,

a) si calcoli $\lim_{t\to+\infty} v_0\left(1-e^{-\frac{t}{k}}\right)$ e se ne indichi il significato fisico

b) si confronti, alla luce delle considerazioni della lettura 1, l'andamento della funzione $v(t)$ con l'andamento dell'accelerazione $a(t)$.

**1. La pendenza**

«il processo di passare dalla formula per una curva a una formula per la pendenza di quella curva si chiama "derivazione", o, "differenziazione". Il primo dà l'idea che la seconda formula "deriva" dalla prima", il secondo riflette l'idea di prendere piccole "differenze" nelle direzioni x e y e calcolare l'inclinazione delle rette risultanti. La funzione pendenza si chiama "derivata" della funzione iniziale.
[da K. Devlin, Il linguaggio della matematica, Bollati Boringhieri, 2002]

Domanda 1

Qual è il significato dell'espressione "prendere piccole "differenze" nelle direzioni x e y"? Spiegare con un esempio.