R. ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

ATTI

DEL

CONVEGNO MATEMATICO

TENUTO IN ROMA DALL'8 AL 12 NOVEMBRE 1942

ROMA
TIPOGRAFIA DEL SENATO
DEL DOTT. G. BARDI
1945

MATEMATICA E MATEMATICI D'OGGI

Relazione inaugurale di FRANCESCO SEVERI.

Mentre dura il supremo cimento, l'Italia vi convoca ad una opera di pace.

Desidero esprimervi la nostra gratitudine e rivolgere un caloroso saluto alle vostre Nazioni.

Di là dalle forze materiali che forman sì un elemento, ma non il più importante, dell'asperrima lotta, questa è dominata dalle energie dello spirito, culminanti nella dedizione dell'uomo al dovere, fino all'estremo sacrificio.

I cultori di scienza qui convenuti, uomini che dedican tutta la vita ad un'elevata missione ideale, non posson non intendere e non ammirare la sovrana purezza degli eroismi che si compion ogni giorno dai combattenti in terra, in mare, in cielo e non inviare ad essi, ad essi e prima ancora ai gloriosi caduti, innanzi d'iniziare i lavori del Convegno, un riverente pensiero, cui s'accompagna il voto di una pace, che assicuri all'Europa ed al Mondo un lungo e fecondo periodo di tranquillità ed una più alta giustizia internazionale e sociale.

L'organizzazione del Convegno è stata assunta dal Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica, che avrà l'onore di ospitarvi.

La fondazione di quest'organo di pura scienza alla vigilia del grande conflitto, dimostra ancora una volta che neppur l'avvicinarsi della perigliosa procella poteva distogliere l'Italia da' suoi compiti universali di civiltà, che tutti i nostri grandi politici e pensatori e fra i moderni, da opposte rive, Vincenzo Gioberti e Giuseppe Mazzini, ci hanno in ogni tempo additati.

La creazione del nuovo Istituto fu determinata dalla volontà di difendere e di valorizzare, anche in un periodo storico, in cui predominan contingenze e necessità materiali, le attività dell'intelletto e dello spirito, quali elementi imprescindibili dell'umano progresso.

Come a parecchi di voi è noto, l'Istituto, pur nelle difficili condizioni presenti, è già riescito ad affermarsi sicuramente e proficuamente nel movimento matematico nazionale ed internazionale.

Il suo programma e la sua azione son dominati dal principio di non costringer la scienza negli angusti limiti delle finalità pratiche e professionali, ma di promuoverne lo sviluppo sopratutto quale indagine disinteressata, animata da aliti di poesia e da calore di fede.

Elevate e vaste visioni sintetiche e posizioni di questioni originali che da esse derivino; ricerca di legami fra indirizzi disparati e di mezzi onde raggiunger la massima economia, semplicità ed armonia nella soluzione dei più complessi problemi, sono i canoni fondamentali che orientano il nostro lavoro, alimentato altresì dal calore umano e dall'entusiasmo suscitato dall'unione familiare e dalla collaborazione giornaliera fra maestri e discepoli.

Rispettate queste norme, gli strumenti utili alle applicazioni nascon automaticamente. D'altronde alla ricerca scientifica noi associamo la visione tecnica dei problemi applicativi e lo studio e l'affinamento e il potenziamento dei mezzi idonei alla loro trattazione, in base al concetto leonardesco che la buona pratica deve edificarsi sulla teoria e che l'esperienza stessa è figliuola della sapienza.

Tale criterio è fin dall'origine dell'Istituto affermato nella sua legge costitutiva, la quale ha in esso statuito una cattedra ed un seminario di applicazioni dell'alta matematica, donde son già derivati utilissimi contributi a problemi industriali e bellici, che abbiam trattato in cooperazione coll'Istituto di Calcolo del Consiglio Nazionale delle ricerche.

È evidente che la snellezza delle funzioni affidate all'Istituto di Alta Matematica è agli antipodi colla rigidità delle norme che non posson non regolare l'istruzione professionale. Per questo esso è sorto con una propria personalità giuridico–amministrativa, ma tuttavia non del tutto distaccata dall'Università, custode gloriosa delle tradizioni del pensiero nazionale e nella quale la cultura s'avviva e, per così dire, s'umanizza, al contatto di sempre rinnovati fiotti di giovinezza.

Ho così in breve tratteggiato la fisionomia dell'organo di scienza, che ha preparato il Convegno. E l'ho fatto non soltanto perché mi pareva un dovere di prammatica di presentarvi il vostro giovine ospite, ma perché son sicuro che questa creazione suscita il vostro interesse e che vi sarà gradito di esaminarne da vicino il funzionamento.

Siamo per questo a vostra disposizione, animati dal desiderio di determinare, oggi e sempre, nuove e propizie occasioni di contatto personale coi matematici di altri Paesi, conformemente ad un altro importante compito dell'Istituto.

A pace raggiunta, speriamo di avere fra noi un numero via via crescente e vario di ospiti, onde accentuare a mano a mano anche la funzione internazionale della nostra istituzione, a vantaggio della civiltà.

Ho avuto recentissima occasione di accennare proprio qui, a Roma, agli stretti legami fra la matematica e il divenire della civiltà, di cui il sapere scientifico costituisce una delle possenti forze motrici; né voglio ripetermi.

Desidero soltanto di sottolineare due conclusioni, onde prenderne le mosse per qualche riflessione generale, che mi sembra appropriata ad inizio ed auspicio dei nostri lavori, nei quali avremo d'altro canto agio di approfondire gli aspetti tecnici di varî importanti indirizzi della matematica contemporanea, attraverso le dotte relazioni approntate e le discussioni che ne seguiranno.

Primo. Rari sono nella storia della civiltà i periodi in cui la filosofia naturale fu tanto completamente dominata, come al presente, dal pensiero matematico. Viene proprio fatto oggi di ripetere, con Galileo, che il gran libro dell'Universo è scritto in lingua matematica.

Non c'è bisogno di ricordare a voi che le scoperte e le invenzioni riguardanti le onde elettriche e le maggiori concezioni fisiche (relatività, meccanica quantistica) caratterizzanti il Novecento, sono o nipoti o figlie dirette della nostra Scienza o che da questa hanno tratto i mezzi essenziali per superare momenti critici, che ne arrestavano il progresso.

Secondo. Il rigore e l'astrattezza delle nuove concezioni della matematica contemporanea sembra che l'allontanino ogni giorno di più dalle possibilità applicative, mentre nel fatto accade esattamente il contrario.

La prima conclusione può essere lumeggiata e rafforzata da un interessante raffronto sui rapporti fra matematica e fisica nei secoli XIX e XX.

L'Ottocento, considerato a buon diritto il secolo delle invenzioni e della matematica pura, differenziasi da tutti i secoli anteriori a causa dei sorprendenti e innumerevoli ritrovati, che incisero sulla vita degli individui; trasformaron nel profondo mezzi di produzione, di scambio; ravvicinaron popoli per l'innanzi lontanissimi; e agiron sulla struttura sociale, economica, politica delle Nazioni, sopratutto coll'originare i movimenti, eppoi le organizzazioni sindacali, esprimenti nuovi bisogni e aspirazioni delle masse operaie, raccolte attorno alle grandi industrie e alle grandi imprese, nelle quali si dissolve lentamente e fatalmente l'artigianato.

Nonostante tutto questo – e sembra un paradosso quel che sto per dire, se non si riflette che la tecnica s'appoggia quasi sempre alla matematica formata, non a quella che si va plasmando – nonostante tutto questo, l'Ottocento è uno dei secoli in cui tecnica e fisica sperimentale furon meno prossime alla nostra scienza: a quella che allora si creava, con sviluppo grandioso dei rami conosciuti e degli altri che, con

inesausta ricchezza, nascevano; i quali progredivano tutti sul terreno astratto, sebbene preparassero, anche senza volerlo, gli strumenti alle applicazioni del secolo successivo, come poi gli eventi dimostrarono.

Periodi d'analogo fervore puramente scientifico si riscontrano nelle età auree della geometria greca ed alessandrina, culminante con l'opera di Archimede, e, molto più tardi, nella scuola cinquecentesca degli algebristi bolognesi.

Ma la scienza non aveva allora permeato di sè tutta la civiltà ed era perciò naturale che si coltivasse soltanto come semplice ornamento filosofico. L'episodio, vero o non vero, di Euclide che regala una moneta al discepolo e lo caccia dalla propria scuola, perché osa domandargli a che cosa serve la geometria o i cartelli di sfida matematica fra gli algebristi italiani del Cinquecento, dipingon a perfezione lo spirito dei tempi.

Ben diverse furon le condizioni dell'Ottocento, e da ciò la singolarità del grandioso sviluppo autonomo della nostra scienza in quel secolo, donde derivò perfino un'astratta fisica-matematica, ridotta, essa medesima, ad un ramo di pura analisi, ove si coglievan gli aspetti comuni a vari fenomeni naturali e se ne riduceva l'indagine allo studio di pochi tipi di equazioni alle derivate parziali, che prendevan posto accanto ai sistemi differenziali ordinari, ai quali, alla fine del Settecento, Lagrange aveva ricondotto la dinamica. Così categorie diversissime di enti fisici eran rappresentate dalle stesse equazioni (salvo le condizioni iniziali e ai limiti).

E il problema fisico sarebbe così apparso più che altro il pretesto per riposti virtuosismi di alta analisi, se le equazioni dell'elettromagnetismo non avessero, sul declinare del secolo, dato un sorprendente contenuto concreto a tutte queste astrazioni e se sperimentatori di più larga visione non avessero a poco a poco assimilato ardui concetti e sviluppi matematici, con risultati e scoperte non obliabili.

La tendenza a straniarsi dalla concreta realtà in un periodo in cui tutto pareva richiamar il sapere verso i portenti della nuova civiltà delle macchine, era forse uno degli aspetti di quell'intellettualismo esasperato, che nella prima metà dell'Ottocento, dopo aspre delusioni rivoluzionarie e visioni pessimistiche e materialistiche della vita e del divenire sociale, aveva preteso di tutto negare e di tutto rivedere, in un atteggiamento di criticismo o di scetticismo ad oltranza.

Di che nella nostra scienza sono restati segni indelebili: benefici segni, come di ogni cosa che l'uomo abbia vissuto e sofferto; e di che resta memoria attraverso a due definizioni, logicamente esatte sì, ma nella realtà ingiuste, perchè colgon soltanto, sotto la specie del paradosso, il valore formale della matematica.

Voglio dire la definizione di Russell (la matematica è una scienza nella quale non si sa mai di che si parli, né se ciò di cui si parla sia

vero) e quella di POINCARÉ (la matematica è l'arte di dar lo stesso nome a cose diverse). Esse hanno deliziato la gioventù della mia generazione, per un momento attratta dalla spietata analisi logica dei principî, che una più pacata visione ci addita quale mezzo e non fine della matematica, i cui progressi sostanziali restan sempre affidati all'estro geniale del ricercatore.

Orbene, quest'esasperazione intellettualistica, che lascia dietro il vuoto e l'amaro, apparisce oggi assurda. Il più originale scrittore vivente dell'Italia contemporanea, GIOVANNI PAPINI, affermava poco fa a questo proposito: « L'età moderna cominciò adorando la Dea Ragione e l'Idea Eterna e dopo avere traversato un inglorioso stadio di basso materialismo, finisce all'estremo opposto, coll'adorazione di tutto ciò che si contrappone all'intelletto: la volontà, l'istinto, l'inconscio, lo slancio vitale, l'azione demiurgica, l'angoscia, la *libido*. Ogni esperienza è consumata e scontata. Si attende ora l'apparizione di una nuova sintesi nella quale sieno luminosamente armonizzati i diritti del reale e dell'idea, dell'intuizione e della dialettica, della terra e del Cielo ».

L'armonia del reale e dell'idea, a cui allude GIOVANNI PAPINI, domina già nel fatto la filosofia naturale; l'esperimento è invero al presente tutt'uno coll'interpretazione matematica dei fenomeni. La visione materialistica dell'Ottocento, che pretendeva ridurre l'universo ad una gran macchina, di cui l'uomo, secondo il sogno di Democrito, poteva conoscere tutti i segreti, sì da costruirne, novello Dio, un perfetto modello, è svanita fra le più ingenue visioni.

Il tentativo di meccanizzare l'imagine del mondo è caduto nel nulla: al modello si è sostituita l'organizzazione matematica del microcosmo atomico, la quale muove da intuizioni, che sebbene giustificate, in misura maggiore o minore, da analogie, non cessan per questo d'esser circondate nella loro intima essenza da un mistero, che ha in sè qualcosa di sacro e d'invalicabile. Un cultore della nuova fisica, DIRAC, è perciò giunto persino a parlare di libero arbitrio degli elettroni.

E siccome il fine della scienza è la previsione degli eventi e questa svanirebbe senza il presupposto di relazioni di causalità, è stato giocoforza, per certi ordini di fenomeni, di limitarsi a coglier soltanto il loro lato probabilistico, attraverso leggi statistiche, che pongon sullo stesso piano mezzi d'osservazione e strumenti e concetti elevati dell'analisi e della geometria contemporanea.

L'elemento soggettivo interferisce inoltre sempre più coll'oggettivo, anche nella fisica. In un corso di Economia matematica, tenuto presso il nostro Istituto, LUIGI AMOROSO ha osservato che la meccanica atomica presenta qualche sorprendente analogia coll'economia, nel senso che come il fenomeno economico è spesse volte modificato

dalla semplice aspettazione del suo accadere, e come ogni configurazione economica futura può pensarci soltanto statisticamente quale fenomeno di massa, così i fatti atomici son alterati dalla presenza dell'osservatore e dall'uso dei mezzi d'osservazione e non trovan espressione tangibile fuori dei rapporti probabilistici. Gli elettroni e le ultime particelle d'energia costituenti i nuclei atomici si comportan cioè in un certo senso, come gl'individui animati d'una collettività.

Avviciniamoci ora un po' di più, per un momento, al tecnicismo della nostra scienza, onde sottolinearne taluni tratti salienti e lanciare qualche audace sguardo sull'avvenire.

Ricordavo poc'anzi che la matematica d'oggi è caratterizzata dal rigore, dall'astrattezza e dalla tendenza a sempre più ampie generalizzazioni. Non però il rigore fine a sè stesso, come nella critica ottocentesca. Non si potrebbe ora ripetere, neppure dai più ortodossi rigoristi, quanto affermava ai principî del secolo perfino un supervalutatore dell'intuizione, ENRICO POINCARÉ, che cioè, sebbene il rigore non sia tutto, senza di esso non vi è nulla.

Niuno ormai crede ai miracolosi poteri della logica pura, la quale resta macchina inerte e nulla più, senza l'energia che l'aziona.

Le preoccupazioni rigoriste hanno dapprima minacciato di annegare il pensiero in un diluvio di precauzioni, donde ha finito poi per derivare un inestimabile servizio: quello di obbligarci a dominarle, esaltando la capacità sintetica del linguaggio e dei simboli.

Lo stesso avviene del linguaggio dei popoli, che acquista sempre maggior comprensione e possibilità di concise rappresentazioni, a mano a mano che il progresso rende più complessa e, sotto certi aspetti, più ardua, la vita umana.

Quel che oggi esprimon la parola ed il segno d'integrale è qualcosa di ben più condensato dal punto di vista concettuale, che non fosse all'epoca di MENGOLI e di CAUCHY o di RIEMANN. E tale concentrazione, in un segno, di tanta energia di pensiero, è dovuta originariamente al lavorìo critico, che, demolendo, ci ha costretto a ricostruire e ad ampliare.

Il medesimo trapasso di schietta origine rigorista, ma che ha finito per aver un forte valore costruttivo, si è avuto nella topologia, assurta da una visione di squisita intuizione ad orizzonti sempre più vasti di spazi astratti, assiomaticamente definiti; e divenuta, in tal guisa, un importante prolungamento della teoria generale degl'insiemi.

Gli esempi si potrebbero moltiplicare, illustrandoli da questo punto di vista, se per voi non bastassero pochi veloci accenni. Calcolo delle variazioni e calcolo funzionale; equazioni differenziali; gruppi continui e gruppi astratti; algebra moderna e la stessa geometria, tanto algebrica che differenziale, in quanto si allacciano alla topologia.

all'analisi, al calcolo tensoriale, hanno risentito, nella loro profonda essenza, nella loro capacità rappresentativa e nel loro grado di generalità, delle odierne esigenze del rigore matematico.

Né occorre qui ricordare quali e quanti dei rami della matematica più astratta e di quella in elaborazione, vadan ogni giorno offrendosi e piegandosi alle esigenze della fisica e della tecnica moderna, proprio mentre le nostre astrazioni più sembra, come dicevo, che ce ne allontanino.

Persino le parti sottili e critiche della teoria delle funzioni di variabili reali e della filosofica teoria degl'insiemi, hanno trovato recente applicazione in problemi pratici; così l'analisi funzionale ha condotto alla soluzione del problema di navigazione di ZERMELO; le serie di FOURIER hanno offerto la soluzione di questioni concernenti le trasmissioni telefoniche a grandi distanze; il problema delle oscillazioni di rilassamento dei radiotecnici equivale alla teoria delle soluzioni periodiche delle equazioni differenziali; gl'integrali di STIELTJES son istrumenti familiari agli attuari; il principio esteso delle probabilità totali, di cui ha dato un bel saggio il CANTELLI, reclama i concetti d'insiemi e di funzioni misurabili e nelle probabilità intervengon financo la geometria dello spazio hilbertiano e le diaboliche curve di PEANO.

E la geometria algebrica, matrice di tante e disparate branche della matematica contemporanea, ma in apparenza a meno immediato contatto colla realtà applicativa, può trasferire molte questioni sugl'integrali abeliani nel dominio dell'elettricità; e lo studio geometrico dei nodi si riflette in quello dell'azione delle correnti sulle correnti e sui poli magnetici.

Si può prevedere che l'atteggiamento rigorista e, più che rigorista, astratto e generalizzatore della matematica d'oggi, non sarà per cessare nell'avvenire. È soltanto infatti in uno spirito d'astrazione e di generalità che si scoprono i riposti legami fra teorie dissimili e tra queste e i fatti.

I momenti importanti, solenni, nello sviluppo della matematica moderna sono – secondo BRUNSCHVIG – quelli in cui due dominî, che eran fino allora coltivati ciascuno per suo conto e parevan così votati ad una limitazione definitiva, entrano improvvisamente in contatto e si prestano un soccorso inatteso.

È soltanto in uno spirito d'astrazione e di generalità, che si potranno affrontare i grandi problemi, necessari alla tecnica di domani, relativi all'integrazione delle equazioni differenziali e più generalmente delle equazioni funzionali.

Occorre superare le questioni d'esistenza, posto che ormai la speranza d'integrare tutte le equazioni differenziali colle funzioni e coi simboli operativi conosciuti, è da gran tempo svanita, sicché ci si volge oggi di preferenza a tentar una loro completa riduzione a tipi,

in ordine ai gruppi di trasformazioni. Il superamento avverrà coll'allargare ulteriormente il concetto di funzione e di funzionale, così da ottenere rappresentazioni simboliche, le quali permettano l'integrazione in ogni caso. È il trapasso analogo a quello che, nel dominio delle equazioni algebriche, si è fatto nel momento in cui si è risaliti dai numeri reali ai complessi, in guisa da eliminare *a priori* la questione esistenziale delle soluzioni, salvo a porsi in un secondo tempo il problema se esse siano o no reali.

Un barlume del genere può rintracciarsi nel metodo euristico di HEAVISIDE per l'integrazione dell'equazione dei telegrafisti: il simbolo in questo caso trascende, con ottimi effetti pratici, il concetto di funzione.

E non dispero di veder presto il calcolo funzionale avviato a giganteschi progressi in virtù di una veramente felice estensione a questo campo della potente operazione di derivazione, ispirata a concetti che i vettorialisti italiani hanno già lumeggiato negli spazi a un numero finito di dimensioni. Né dispero di veder la topologia offrire sorprendenti scoperte fisiche e tecniche, le quali segneranno il trionfo dell'astrazione e riconfermeranno la veduta di MAX PLANCK, secondo cui la scienza meglio s'avvicina alla conoscenza dell'Universo, concepito come realtà obiettiva, sovrastante il soggetto, quanto più s'allontana dall'originario carattere antropomorfico e intuitivo e si eleva nell'astratto.

Queste previsioni son d'altronde poggiate sulla fede che l'avvenire della società, non ci avvii alla decadenza, caratterizzata sempre storicamente dall'esaurirsi dello spirito d'indagine e dalla ostinata aderenza al mero senso utilitario; ma verso forme più alte di convivenza.

I matematici hanno ogni giorno di più la sensazione che la loro disciplina non è né deve essere mai avulsa dalla vita dell'ora e tanto meno dalla vita nazionale; ed hanno perciò la coscienza di esser da tempo usciti dalle inutili ed olimpiche torri d'avorio.

Non son in conseguenza oggi possibili gl'ingannevoli sconforti, che trassero NEWTON ad appartarsi dalla scienza, per passare gli ultimi anni della vita a meditare sull'*Apocalisse* o le parole melanconiche di LUIGI LAGRANGE a D'ALEMBERT, nel 1781: « Non posso garantire che fra dieci anni io faccia ancora della geometria . . . la miniera è ormai sfruttata e, a meno che non si scoprano nuovi filoni, bisognerà prima o poi abbandonarla . . . il gusto del secolo pare interamente rivolto verso la fisica e la chimica e non è impossibile che le classi di geometria nelle Accademie divengan un giorno quel che sono oggi le cattedre di arabo nelle Università ».

Parole amare, inconcepibili nella bocca di un creatore, parole che la stessa opera successiva di LAGRANGE ed i progressi immensi dei tempi che seguirono, dovevan smentire in pieno.

Platone, nella sua repubblica ideale, faceva studiare dieci anni le matematiche ai futuri reggitori dello Stato. Noi non aspiriamo a tanto, anche perché sappiamo che la grande arte di governo, richiede come ogni altra, il genio nativo dell'uomo di eccezione, che abbraccia con potenti colpi d'ala passato, presente e avvenire; vede, prevede, provvede, profondo conoscitore di tutte le possibilità umane.

Noi aspiriamo molto più modestamente, a colmare il divario che la cultura e la filosofia moderna hanno posto fra la scienza, ed in particolare la matematica, e quello che, per intenderci rapidamente, possiamo chiamare l'atteggiamento letterario; e non dico rettorico: perché la parola non s'interpreti nel senso peggiore, nè dico storico, perché la storia ha troppa importanza anche nella maturazione del pensiero scientifico. A colmar il divario, sicchè ciascuno si renda conto, almeno a grandi linee, delle possibilità filosofiche, applicative e perfino sociali e politiche di una disciplina, che in ogni età creativa fu regina del pensiero.

Qui, donde nei secoli s'irradia la luce di gran parte degli elementi che dominano e confluiscono nella moderna civiltà, ogni energia dello spirito ha diritto di cittadinanza; chè nel tempio Capitolino, vicino alla cella di Giove, Ottimo Massimo, la sapienza trova idealmente il suo posto nella cella di Minerva.

La matematica è degna di questa sede ideale.