

## CON GÖDEL, ESCHER, BACH OLTRE LA SCUOLA DELLE DISCIPLINE

EMILIO AMBRISI

SOMMARIO: 1. Interdisciplinarietà. - 2. Gödel, Escher, Bach. - 3. Ricorsività. - 4. Incompletezza. - 5. Insegnamento.

### 1. Interdisciplinarietà

Il tema dell'interdisciplinarietà è di nuovo attualissimo. Se ne è discusso molto negli anni settanta del secolo scorso, poi molto di meno. Nel 1975 il filosofo Dario Antiseri scrisse: "La scuola delle discipline una accanto all'altra, una dopo l'altra, una senza l'altra sta vivendo ore di agonia".<sup>1</sup> Il matematico Angelo Fadini,<sup>2</sup> commentando, si chiese: "Ma è vero? Se fosse vero dovremmo solo augurare alla nostra scuola un'agonia breve, anzi brevissima, e attendere con soddisfazione che dalle ceneri della scuola delle discipline nasca una nuova scuola impostata su nuovi criteri didattici che sappia inserirsi nella problematica scientifica e sociale della vita moderna".

Oggi il discorso è ripreso. L'augurio di A. Fadini sono in tanti ad esprimerlo e con ritrovato vigore. È volto a interrompere quello che appare un vero e proprio accanimento terapeutico: mantenere in vita un organismo che si alimenta di discipline che crescono in numero, consistenza e complessità e che la scuola non riesce più né a contenere né a tollerare.

"Oltre le discipline" appare la via da seguire per il futuro, e molti esperti pedagogisti propongono di impostare la didattica sulle quattro "C": critica, comunicazione, collaborazione e creatività.<sup>3</sup> Altri sono alla ricerca di soluzioni più concrete, antidoto efficace anche all'incomprensione reciproca e universale che appare decisamente in crescita: soluzioni più concrete atte a superare quella generale e primaria percezione che un altro matematico, il notissimo Bruno de Finetti, sintetizzava con l'aforisma: "Interdisciplinarietà e transdisciplinarietà rientrano tra i mille modi del non dir niente".

Dire qualcosa dunque che abbia significato! Un segnale concreto lo si è colto quest'anno con gli esami di maturità. Il tema della seconda prova

---

<sup>1</sup> DARIO ANTISERI, *Epistemologia contemporanea e didattica della storia*, Armando, 1975.

<sup>2</sup> ANGELO FADINI, *Premessa sull'insegnamento interdisciplinare*, Periodico di Matematiche, n.1-2/1977.

<sup>3</sup> YUVAL NOAH HARARI, *21 lezioni per il XXI secolo*, Saggi Bompiani, 2018.

---

scritta è divenuto multidisciplinare e per certi versi interdisciplinare. Il riferimento è qui in particolare alla prova di matematica e fisica dell'indirizzo di liceo scientifico. Il dibattito è stato così ricco da aprire le porte a riflessioni su questioni e problematiche quali *invarianza, reversibilità, simmetria, ricorsività, teoremi di Gödel* che, per affrontarli, richiamano contenuti appartenenti alle più diverse discipline e la necessità di vederli insieme in forma integrata.<sup>4</sup>

## 2. Gödel, Escher, Bach

C'è bisogno comunque di riferimenti. In quest'ottica viene spontaneo pensare ad un libro che è il prodotto caratteristico di quegli anni settanta. Il libro è *Gödel, Escher, Bach* di Douglas R. Hofstadter, pubblicato esattamente quarant'anni fa, nel 1979. Un libro di successo, tradotto in tante lingue e più volte riedito. In Italia la prima edizione, da Adelphi, è del 1984. Il titolo – *Gödel, Escher, Bach* – è completato da: *un'eterna ghirlanda brillante*, e ancora prolungato nel sottotitolo: *una fuga metaforica su menti e macchine nello spirito di Lewis Carroll*. Frasi che, se da una parte liberano una moltitudine di significati che si vorrebbe rincorrere, dall'altra invitano a proseguire nella scelta di sotto-sottotitoli, come in un gioco regolato da una soggiacente procedura ricorsiva. Si è portati cioè ad attivare un processo che è non lontano dallo spirito dell'autore di *Alice nel Paese delle Meraviglie* e a penetrare fin da subito finalità e struttura di un libro marcatamente interdisciplinare, vincitore, nel 1980, del premio Pulitzer per la saggistica. Un libro di ragionamenti e di pensiero che, sull'onda del giovanile entusiasmo del suo autore, appena trentatreenne, figlio di un Nobel per la fisica,<sup>5</sup> lega insieme matematica, arte, musica, logica, macchine, informatica, ingegneria, IA e robotica, neuroscienze in uno "strano anello", qualcosa che fa pensare "al fatto di ritrovarsi inaspettatamente, salendo o scendendo lungo i gradini di qualche sistema gerarchico, al punto di partenza. Salire una scala e ritrovarsi ai piedi della scala. Un fenomeno che Escher ha disegnato, che Bach ha messo in musica, che Gödel ha posto al centro del suo teorema". Salire una scala e ritrovarsi ai piedi della scala. Come nel-

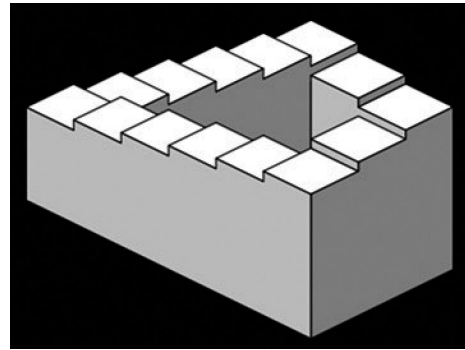


Figura 1 - Scala di Penrose

Figura 1 - Scala di Penrose

<sup>4</sup> ATALIA DEL BENE-EMILIO AMBRISI, *Perché e come l'insegnamento della Matematica deve cambiare*, in Rivista Lasalliana, 86 (2019), 2, pp. 211-216.

<sup>5</sup> ROBERT HOFSTADTER, premio Nobel nel 1963.

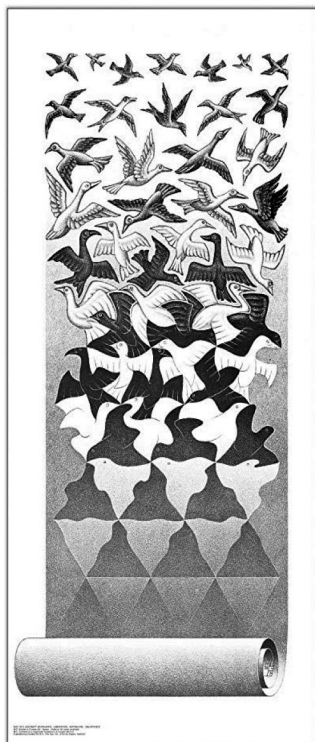


Figura 2 - *Libération*, 1955

l'esempio fornito da Sir Roger Penrose.<sup>6</sup> Ma anche come muoversi sulla superficie dell'anello o nastro di Möbius: camminare sulla faccia esterna e ritrovarsi su quella interna senza averla attraversata.

Hofstadter è un appassionato di musica, di logica, di computer, di arte. Lo è in un modo naturalmente interdisciplinare, frutto di una formazione sviluppata in un ambiente sociale ricco di voci e registri culturali. Egli ha maturato l'idea che Gödel, Escher e Bach siano solo "ombre" proiettate in diverse direzioni da una qualche solida essenza centrale. Il suo è allora il tentativo di ricostruire questo oggetto centrale. I tre fili del discorso che Gödel, Escher e Bach hanno separatamente sviluppato s'intrecciano continuamente in nodi che sono gemme che luccicano, brillanti come sono i prodotti del pensiero e eterni com'è la vera conoscenza, com'è la matematica che non ha nulla di caduco, di effimero, di transeunte: è ciò che sempre è e non nasce e non perisce, per dirla con Platone.

Una narrazione, quella di Hofstadter, non sempre facile da seguire, ma avvincente, quando capita. Il ruolo di Escher, ad esempio, è quello del liberatore. Il suo è il tentativo continuo di portare fuori dalla mente quelli che ne sono i prodotti, come nella litografia *Libération* del 1955. Attraverso il disegno dà rilevanza visiva all'attività del cervello, dà spazio e sostanza a concetti, idee, procedure, grovigli e labirinti mentali. E tra tutte queste attività della mente ce ne sono due che attirano particolarmente l'attenzione di Hofstadter: hanno per lui un fascino tutto particolare. Sono il *teorema di Gödel* sull'incompletezza dei sistemi formali e l'idea di *ricorsività*. "Escher - scrive Hofstadter - è, nel campo dell'arte, la massima approssimazione umanamente concepibile all'idea di ricorsività e cattura in maniera sorprendente in alcune sue immagini lo spirito del teorema di Gödel". Le opere di Escher danno il senso dell'infinito, dell'illimitatezza, della prosecuzione indefinita che è la caratteristica della ricorsività, e uguale caratteristica rivela l'opera di Bach, la sua *Offerta musicale*. E così Gödel. Il suo teorema è paragonato ad una perla, e il metodo per dimostrarlo a un'ostrica: «un complicato essere vivente che nelle sue viscere dà origine a questo gioiello dalla misteriosa semplicità».

<sup>6</sup> ROGER PENROSE, *La mente nuova dell'imperatore*, Rizzoli, 1989.

### 3. Ricorsività

Che cos'è la ricorsività? La definizione di Hofstadter è letterariamente e concettualmente bella e coinvolgente: "l'annidarsi di cose entro cose e le sue variazioni [...] Un racconto all'interno di un racconto, una commedia nella commedia, un quadro dentro un quadro, scatole cinesi dentro scatole cinesi (perfino commenti tra parentesi all'interno di commenti tra parentesi!): tutto ciò dà solo una piccola idea del fascino della ricorsività". Più concretamente, quasi tutte le nostre operazioni sono di tipo ricorsivo: mangiare, camminare, contare, misurare. Si tratta cioè di un metodo dinamico in cui ogni passo si compie a partire dal precedente. Le macchine operano in maniera ricorsiva e una tesi, detta di Church,<sup>7</sup> molto importante nel panorama della complessità e della calcolabilità, afferma che tutti e soli i problemi risolvibili sono di tipo ricorsivo generale. Ma non meno affascinante è parlarne in termini formali partendo dallo schema che generalmente si associa al concetto di **funzione**:<sup>8</sup> una macchina che trasforma un dato  $x_0$  in entrata in un ben determinato, e unico,  $x_1$  in uscita. Ovviamente è importante precisare l'insieme  $X$  dove si attingono gli  $x$  in entrata, l'insieme sorgente o dominio, e altrettanto importante è l'insieme di arrivo o "bersaglio" (termine privilegiato quando nell'azione didattica si usano le "freccette") o, più formalmente, codominio. Può anche darsi che l' $x_1$  sia della stessa natura di  $x_0$ , appartenga cioè ancora ad  $X$ . Allora si può reintrodurre in macchina, e se il codominio è parte del dominio, cioè se è  $f(X) \subset X$ , il dato in uscita  $x_1$  può essere reintrodotta in ingresso e l' $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$  in uscita, ancora reintrodotta, e così via.

Si tratta dunque di studiare il comportamento di una sequenza di valori

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$$

che può anche scriversi:

$$f^0(x), f^1(x), f^2(x), \dots, f^n(x)$$

dove è:

$f^0 =$  identità in  $X$ ,  $f^1 = f$ ,  $f^2 = f \cdot f$ , ...,  $f^n = f \times f \times \dots \times f$   $n$  volte.

Il valore iniziale di  $x$  può essere chiamato "seme" e l'idea è quella di continuare a reintrodurre in  $f$  il valore di  $f$  e vedere se emerge una qualche rego-

<sup>7</sup> ALONZO CHURCH (1903-1995). Alla tesi di Church facevano riferimento sia i programmi PNI che i piani di studio "Brocca" per il liceo scientifico.

<sup>8</sup> EMILIO AMBRISI, *Ricorsività*, in Enciclopedia Pedagogica, diretta da Mauro Laeng, Vol. 4, Editrice La Scuola, 1989.

larità o struttura o principio organizzatore. È questo il punto di vista adoperato nello studio dei **sistemi dinamici**<sup>9</sup> ove l'insieme dei successivi punti

$$\{ x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots \}$$

è detto **orbita** di  $x_0$ .

Prendiamo ad esempio la funzione ricorsiva  $x_{n+1} = x_n^2 + c$ : studiata nel campo reale, dice poco o niente, mentre una importanza tutta particolare assume nel campo complesso. Ponendo per semplicità  $c=0$ , si tratta di studiare il comportamento della sequenza di numeri complessi

$$x_0, x_0^2, (x_0^2)^2, \left( (x_0^2)^2 \right)^2, \dots$$

Denotando con  $|x_0|$  il modulo del "seme"  $x_0$ , si ha che:

- Se  $|x_0| < 1$  allora l'origine  $x = 0$  è un attrattore: tutti i punti che distano da essa meno di 1 ne subiscono l'influenza;
- se  $|x_0| > 1$  è  $\infty$  (infinito) che funge da attrattore;
- se  $|x_0| = 1$  poiché i complessi di modulo 1 sono stabili rispetto alla moltiplicazione - costituiscono anzi un gruppo moltiplicativo - i punti si mantengono sulla circonferenza unitaria che costituisce la frontiera tra i due domini di attrazione.

Questi punti rappresentati nel piano danno luogo a una figura geometrica definita da Benoit Mandelbrot<sup>10</sup> un **frattale**. In sostanza: funzioni, all'apparenza aride e meccaniche iterazioni, producono forme geometriche che la **computer art** rende di una straordinaria bellezza policromatica. Ma c'è di più: da formule espressione di sicuro ordine, prendono corpo immagini e forme geometriche che contengono quel tanto di disordine, irregolarità ed imprevedibilità che pervade la natura e gli oggetti naturali: la forma di un albero, di una nuvola, di una catena montuosa o di una costa difficilmente contengono quegli elementi della geometria euclidea - quali rette, angoli diedri, piani, ecc. -



Figura 3 - Pesci e squame, 1959

<sup>9</sup> EMILIO AMBRISI, *Spunti in Matematica discreta*, Quaderno UMI, Olimpiadi Internazionali, 1995.

<sup>10</sup> Il termine *frattale* è stato introdotto da Benoit Mandelbrot nel 1975 e deriva dal latino *fractus*.



che distinguono gli artefatti, ossia gli oggetti realizzati dall'uomo. Ecco allora i frattali come geometria della Natura, oggetti molto molto complessi immersi in spazi molto molto semplici, dotati, in ogni punto, di continuità ma non di derivabilità, dotati altresì di una spiccata autosimiglianza come in "Pesci e squame" di Escher. La xilografia è del 1959. È rivelatrice di una procedura ricorsiva, e per certi versi anticipa l'idea, comune con i frattali, che le parti di un oggetto possono essere copie dell'oggetto stesso.

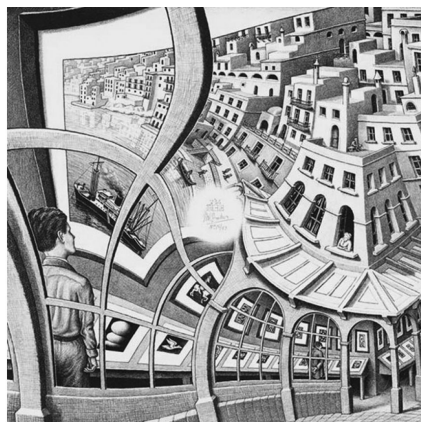


Figura 4 - La Galleria di Stampe, 1956

«Naturalmente - scrive Hofstadter - questi pesci e queste squame sono uguali solo se visti a un livello sufficientemente astratto. Tutti sanno che le squame di un pesce non sono veramente piccole copie di un pesce; e neanche le cellule del pesce sono piccole copie del pesce; comunque, il DNA di un pesce, posto all'interno di ogni singola cellula del pesce, è una "copia" molto involuta dell'intero pesce: il quadro di Escher contiene perciò più che un granello di verità. [...] La cosa sorprendente è che anche una parte piccolissima di un disegno di Escher o di un pezzo di Bach è sufficiente a rivelarne l'autore. Proprio come all'interno di ogni minuscolo pezzetto di pesce è contenuto il suo DNA, così ogni piccolo frammento di un'opera porta la "firma" del suo autore. Non sappiamo come chiamarla se non "stile", una parola vaga e sfuggente».

#### 4. Incompletezza

Nello stile di Escher *La Galleria di Stampe* del 1956 rivela un itinerario di immagini mentali assimilabili ad uno strano anello: un giovane è in una galleria d'arte che guarda, all'interno di un quadro, una nave che entra nel porto che appartiene alla città che contiene la galleria che contiene il quadro che il giovane di spalle sta guardando. Un procedere ricorsivo, ma anche qualcosa in più: «una parabola pittorica del teorema di incompletezza di Gödel». Una incompletezza che è anche grafica, in quella parte centrale, lasciata bianca, utilizzata per la firma.<sup>11</sup> Un teorema notevole inter e trans-disciplinare. Un teorema che fissa un limite alla qualità dell'umano

<sup>11</sup> Due matematici dell'università di Leida sono riusciti nel 2003 a "riempire" lo spazio bianco in modo compatibile alla percezione prospettica. Una descrizione del lavoro è su: <http://www.ams.org/notices/200304/fea-escher.pdf>.

sapere; un teorema del no, del limite a ciò che si può fare, dell'esistenza di ciò che è indecidibile.<sup>12</sup> Ad esempio: non possiamo provare la completezza dell'aritmetica rimanendo all'interno del sistema «aritmetica». O anche, in un contesto applicativo: in un calcolatore, per quanto potente, ci sarà almeno un problema formulabile nel suo linguaggio che non saprà risolvere. Bisognerà ricorrere a un altro calcolatore e poi ancora ad un altro, in una gerarchia che non vedrà mai raggiunta la risolubilità completa dei problemi ammissibili.

È come quando per vedere meglio ciò che succede intorno a noi dobbiamo cambiare punto di vista, salire su una qualche altura, elevarci. Gödel quindi non è solo negatività, limitazione, incertezza. Insegna anche che ci saranno sempre nuovi gradini da salire, sempre nuovi spazi da esplorare e raccordare, sempre nuovi risultati da aggiungere. Mai porremo la parola "fine" all'impegno intellettuale dell'uomo, e la matematica non finirà. Mai ci sarà un ultimo risultato della matematica. Se ci fosse, potremmo ordinare l'insieme dei risultati, scegliere un buon ordinamento e risolvere una volta per tutte anche il problema pedagogico: trovare la via regia per insegnare la matematica.

Gödel, Escher e Bach, dunque, un libro che distilla materie diverse e conduce a percepire la bellezza di ciò che è suono, visione, immaginazione, esattezza e coerenza logica. Un libro che offre "cose interessanti a vari livelli", in analogia a quanto avviene nell'*Offerta musicale* di Bach dove, con le parole di Hofstadter, «vi sono giochi di prestigio con note e lettere; variazioni ingegnose...fughe straordinariamente complesse; vi è bellezza ed estrema profondità emotiva. Ne scaturisce un'esultanza che emana dalla molteplicità di livelli dell'opera. L'*Offerta musicale* è una fuga di fughe, una Gerarchia Aggrovigliata come quelle di Gödel e di Escher, una costruzione intellettuale che mi ricorda, in modi che non sono in grado di esprimere, la magnifica fuga a più voci della mente umana. E questo è il motivo per cui nel mio libro i tre fili del discorso sviluppato da Gödel, da Escher e da Bach s'intrecciano insieme in un'Eterna Ghirlanda Brillante».

## 5. Insegnamento

C'è una grande inquietudine oggi, rispetto al futuro. Tutto appare largamente incerto, indeciso, imprevedibile. Il cambiamento è la sola costante e, per ciò stesso, produce disorientamento, rende insicuri. Ne risentono anche, se non soprattutto, le scelte educative. "Un bambino nato oggi - ha scritto

---

<sup>12</sup> In verità si dovrebbe utilizzare il plurale: sono due infatti i teoremi di Gödel. Si veda "I teoremi di incompletezza" il recente riuscito saggio di Gabriele Lolli (Il Mulino, 2019).

Yuval Noah Harari<sup>13</sup> – avrà poco più di trent'anni nel 2050. Se tutto gli va bene, sarà ancora in vita intorno al 2100, e potrebbe persino essere un cittadino attivo del XXII secolo. Che cosa dovremmo insegnare a questo bambino per aiutarlo a sopravvivere e avere successo nel mondo del 2050 o in quello del XXII secolo? Quali competenze professionali dovrà avere per trovare un'occupazione, comprendere quello che gli succede intorno ed orientarsi nel labirinto della vita?" La lezione che possiamo trarre da Gödel, Esher e Bach ma anche da altre opere simili è che qualcosa c'è che vale la pena di coltivare e di trasmettere. È quella ghirlanda che possiamo rendere ancora di più intrecciata e brillante, e il suo carattere, che riconosciamo eterno, tradurlo in un "invariante" nel cambiamento. Un'invariante al quale radicare la comprensione dell'essere persone, umani in un futuro disumanizzato in macchine e algoritmi. Un'invariante inteso come "pane quotidiano" da garantire ai figli e nipoti che abiteranno il pianeta Terra non tanto nell'essenzialità quanto nei valori e nei canoni di semplicità e di bellezza che ancora possiamo cogliere a distanza di duemila anni con gli stessi occhi dell'imperatore Marco Aurelio in un "pensiero" che metaforicamente è sintesi di molto di quanto è stato detto:

«Mentre il pane si cuoce, alcune sue parti si screpolano e queste venature che vengono così a prodursi, e che in un certo senso contrastano con il risultato che si prefigge la panificazione, hanno una loro eleganza e un modo particolare di stimolare l'appetito. Ancora: i fichi pienamente maturi si presentano aperti. E nelle olive che dopo la maturazione sono ancora sulla pianta è proprio quell'essere vicine a marcire che aggiunge al frutto una particolare bellezza».

I nostri eredi, malgrado tutte le indecisioni e inquietudini emergenti da un mondo che cambia, malgrado anche le mutazioni biologiche<sup>14</sup> che si profilano, potranno così anche essi ancora godere della stimolazione dell'appetito e della sazietà spirituale, intellettuale, fisica, del pane e dei frutti che l'Uomo ha prodotto e che la Natura vorrà ancora, speriamo con il nostro impegno, continuare a donare loro.

---

<sup>13</sup> YUVAL NOAH HARARI, storico e saggista israeliano sta riscuotendo un enorme successo a livello internazionale. La citazione è tratta dalle 21 lezioni per il XXI secolo (la lezione: Istruzione), già citato.

<sup>14</sup> È uno degli scenari del futuro descritti nei suoi libri da Yuval Noah Harari. In particolare, la disuguaglianza tra gli uomini non sarà più economica, ma biologica.

---