Tema: Intuizione e ragionamento.

di Antonino Giambò

In questo contributo propongo alcuni problemi che evidenziano come intuizione e ragionamento non sempre vanno d'accordo.

Divido l'articolo in due parti: nella prima mostro i testi dei problemi, nella seconda parte la loro risoluzione.

Problema 1. Matteo, che è un guidatore prudente, va dalla località A alla località B muovendosi in macchina alla velocità media di 40 km/h. Quale velocità media dovrebbe tenere nel viaggio di ritorno da B ad A in modo che la velocità media sull'intero percorso (da A a B e da B ad A) sia il doppio della velocità media tenuta all'andata? È possibile conoscere la lunghezza del percorso?

Problema 2. Il buon Matteo ha calcolato che, muovendosi in macchina alla velocità media di 40 km/h per andare dalla località A alla località B, giungerebbe a destinazione un quarto d'ora dopo le ore 8; mentre, muovendosi alla velocità media di 60 km/h, vi giungerebbe un quarto d'ora prima delle ore 8. Quale velocità media dovrebbe tenere per giungere a destinazione esattamente alle ore 8? È possibile conoscere la lunghezza del percorso?

Problema 3. Giacomo si accinge a compiere un lungo percorso in macchina. Decide di farlo in tre tappe di uguale lunghezza ma, essendo meno prudente di Matteo, percorre la prima tappa alla velocità media di 130 km/h, la seconda alla velocità media di 125 km/h e la terza alla velocità media di 120 km/h. Qual è la velocità media tenuta da Giacomo sull'intero percorso? È possibile conoscere la lunghezza del percorso?

Problema 4. Era in programma la 18ª tappa di quel Giro d'Italia. Si trattava di una cronoscalata di 30 km: i primi 7 km avevano una pendenza media del 9%, i successivi 17 km una pendenza media del 5% e gli ultimi 6 km una pendenza media del 10%. I commentatori dissertavano sulle difficoltà che avrebbero incontrato i corridori in quella tappa che presentava, a loro dire, una pendenza media dell'8%, avendo essi assimilato questa pendenza media alla media aritmetica delle pendenze dei tre tratti considerati. Ma è veramente così?

Problema 5. I signori Rita e Gaetano Rossi hanno tre figli. Si sa che uno di essi è maschio. Essendo richiesto di calcolare la probabilità che, degli altri due figli, uno sia femmina e l'altro maschio, Piero ha risposto che essa è $1/3$, mentre Giulio ha risposto che è $1/2$. Chi dei due ha ragione?

Problema 6. In un'urna ci sono due palline: una è bianca, l'altra può essere bianca o nera, non si sa esattamente. Si estrae a caso una pallina e si costata che è bianca. Qual è la probabilità che la pallina rimasta nell'urna sia nera?

Risoluzione del problema 1.

La prima idea che viene in mente, almeno a livello intuitivo, è che la velocità cercata sia di 120 km/h, vale a dire una velocità tale che la media aritmetica di questa velocità e di quella tenuta nel percorso d'andata (40 km/h) sia uguale alla velocità media che dovrebbe tenere Matteo sull'intero percorso, e cioè 80 km/h. Ma non è così. Proviamo a ragionare.

Indichiamo con s la lunghezza del percorso dalla località A alla località B (ovviamente uguale a quella da B ad A), con t il tempo impiegato da Matteo per andare da A a B e con t' quello impiegato per andare da B ad A. Sia inoltre v la velocità media tenuta sul percorso di ritorno, che è quella che vogliamo conoscere. Si ha allora:

$s = 40\,t\,,\quad s = v\,t',\quad 2\,s = 80\,(t+t')$.

Da qui, ricavando t e t' dalle prime due equazioni e sostituendo nella terza, si ottiene:

$$2\,s = 80\,\left(\frac{s}{40}+\frac{s}{v}\right),$$

da cui, dopo semplici elaborazioni segue:

$$\frac{1}{v} = 0 \,.$$

Equazione impossibile nell'incognita v, salvo che al limite per $v \to \infty$.

Insomma, non solo è sbagliata la prima intuizione che fosse $v = 120\ \mathrm{km/h}$, ma addirittura nessuna velocità nel viaggio di ritorno permette a Matteo di conseguire una velocità media sull'intero percorso doppia della velocità tenuta all'andata.

Ovviamente i dati non sono sufficienti per calcolare la lunghezza del percorso.

Risoluzione del problema 2.

Intuitivamente, sembra di poter dire di primo acchito che la velocità cercata sia la media aritmetica delle due velocità note, vale a dire 50 km/h. Ma non è così. Andiamo a vedere.

Incominciamo ad indicare con s la lunghezza del percorso, con t' il tempo impiegato alla velocità di 40 km/h e con t" quello impiegato alla velocità di 60 km/h. Si ha allora:

$s = 40\,t', \quad s = 60\,t'', \quad t' = t''+0{,}5$ (ore).

Risolvendo il sistema di queste tre equazioni nelle incognite, s, t', t", si ottiene:

$t'' = 1$ (h) , $t' = 1{,}5$ (h) , $s = 60$ (km) .

Intanto si costata che il percorso è lungo 60 km.

Si desume inoltre che il tempo impiegato da Matteo per giungere a destinazione esattamente alle ore 8 sarebbe $t=1{,}25$ (h) e pertanto terrebbe una velocità media v tale che:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{60}{1{,}25} = 48\ (\mathrm{km/h})\,.$$

Non è esattamente la media aritmetica delle due velocità note.

Risoluzione del problema 3.

A questo punto si è certamente capito che è errata la prima intuizione, ossia che la velocità cercata sia la media aritmetica delle tre velocità note, vale a dire 125 km/h. Ma forse non è ancora ben chiaro come si possa giungere a calcolare la velocità media sull'intero percorso e soprattutto qual è questa velocità.

È quello che andiamo a fare, anticipando che il ragionamento non è dissimile da quello esposto nella risoluzione del problema 1.

Indichiamo allora con 3s la lunghezza dell'intero percorso e con t_1, t_2, t_3 i tempi impiegati per percorrere rispettivamente il 1°, il 2° e il 3° tragitto. Chiamata infine v la velocità media sull'intero percorso, si ha:

$s = 130\,t_1, \quad s = 125\,t_2\,, \quad s = 120\,t_3\,, \quad 3s = v\,(t_1+t_2+t_3).$

Da qui, dopo aver ricavato t_1, t_2 e t_3 dalle prime tre equazioni e sostituito nella quarta equazione, si ottiene:

$$3s = v\left(\frac{s}{130}+\frac{s}{125}+\frac{s}{120}\right) \text{ e dunque: } v = \frac{3}{\frac{1}{130}+\frac{1}{125}+\frac{1}{120}} \approx 124{,}87\ \mathrm{km/h}\,.$$

Valore effettivamente diverso dalla media aritmetica delle tre velocità note.

I dati non sono sufficienti per calcolare la lunghezza del percorso.

Risoluzione del problema 4.

Chi legge ha molto probabilmente intuito che la pendenza media sull'intero percorso non è uguale alla media aritmetica delle pendenze medie dei tre tratti, cioè 8%. Ma anche se l'intuizione è corretta, richiede comunque una conferma e, in ogni caso, bisogna calcolare questa pendenza media.

Lo faremo tra breve, dopo aver speso qualche parola sul concetto di pendenza media di una strada.

Orbene, se si assimila la strada all'ipotenusa AB di un triangolo rettangolo ABC (figura 1), la sua pendenza è la tangente dell'angolo in A, vale a dire il rapporto $\frac{CB}{AC}$, esattamente come la pendenza (o coefficiente angolare) di una retta assegnata in un piano cartesiano.

figura 1

D'altro canto, in situazioni come queste, in cui l'angolo in A è piuttosto piccolo (in genere meno di 10°), possiamo supporre che sia $\frac{CB}{AC} \approx \frac{CB}{AB}$. Ragion per cui si può assumere come pendenza (media) della strada il rapporto $\frac{CB}{AB}$, che poi altro non è che il seno dell'angolo in A.

Una tabella (tabella 1) evidenzia come, per angoli minori di 10°, la tangente dell'angolo sia con buona approssimazione uguale al seno.

α	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
$\tan\alpha$	0,01746	0,03492	0,05241	0,06993	0,08749	0,10510	0,12278	0,14054	0,15838	0,17633
$\sin\alpha$	0,01745	0,03490	0,05234	0,06976	0,08716	0,10453	0,12187	0,13917	0,15643	0,17365

tabella 1

Si può costatare come l'approssimazione peggiori al crescere dell'ampiezza dell'angolo, ma l'errore relativo che si commette nell'assumere $\sin\alpha$ al posto di $\tan\alpha$ è pur sempre trascurabile, essendo inferiore al 2%. Per α=10° si ha infatti il seguente errore relativo:

$$\varepsilon_r = \frac{0{,}17365 - 0{,}17633}{0{,}17365} \approx 1{,}5\,\% .$$

A conclusione di queste considerazioni: affermare che una strada ha una pendenza (media) p% significa che, quando si percorre un tratto di strada di 100 m, la strada s'innalza di p metri rispetto al livello del mare.

Nel caso del nostro problema bisogna allora calcolare anzitutto di quanto la strada, lunga 30 km, s'innalza sul livello del mare.

Ora, riguardo al primo tratto (lunghezza L_1 = 7 km, pendenza p_1 = 0,09), l'innalzamento H_1 è tale che:

$$p_1 = \frac{H_1}{L_1}\,,\quad \text{da cui segue: } H_1 = p_1L_1 = 0{,}09 \times 7 = 0{,}63 \text{ (km)}.$$

Parimenti, gli innalzamenti dei tratti 2° e 3° sono nell'ordine:

$$H_2 = 0{,}05 \times 17 = 0{,}85 \text{ (km)},\quad H_3 = 0{,}10 \times 6 = 0{,}60 \text{ (km)}.$$

L'innalzamento totale è dunque: H=0,63+0,85+0,60=2,08 (km). Si desume che la pendenza dell'intero percorso è:

$$p = \frac{2{,}08}{30} \approx 6{,}9\,\% .$$

Risoluzione del problema 5.

Proviamo a ricostruire il ragionamento di Piero.

Assodato che uno dei tre figli è maschio, gli altri due possono essere entrambi maschi o entrambi femmine oppure infine una femmina e un maschio. Quindi in un caso su 3 gli altri due figli sono una femmina e un maschio: la probabilità è pertanto 1/3.

Proviamo a ricostruire il ragionamento di Giulio.

Dato che uno dei tre figli è maschio, gli altri due possono essere M-M, M-F, F-M, F-F, avendo messo al primo posto di ogni coppia il figlio maggiore. Quindi in 2 casi su 4 gli altri due figli sono una femmina e un maschio: la probabilità è pertanto 1/2.

Anche se il ragionamento di Giulio è "più convincente" di quello di Piero, purtroppo entrambi i ragionamenti sono errati ed errate sono pertanto le risposte, dal momento che nessuno dei due prende in considerazione tutte le possibilità che si presentano.

Andiamo allora a descrivere qual è il ragionamento corretto, incominciando proprio ad elencare tutte le possibilità in questione. Consideriamo per questo motivo il sesso dei tre figli in ordine decrescente di età:

M-M-M, M-M-F, M-F-M, M-F-F, F-M-M, F-M-F, F-F-M, F-F-F.

Siccome è noto che uno dei tre figli è maschio, bisogna ovviamente escludere l'ultima terna F-F-F.

Rimangono 7 casi. Se si accantona in ognuna delle 7 terne un figlio maschio, si ottengono le seguenti 7 coppie: M-M, M-F, F-M, F-F, F-M, F-F, F-F.

In 3 casi (su 7) si presenta la possibilità di un figlio femmina e uno maschio: la probabilità è pertanto $3/7$.

Faccio notare che, se si sa per esempio che, dei tre figli dei coniugi Rossi, il maggiore è un maschio, allora è $1/2$ la probabilità che degli altri due uno sia femmina e l'altro maschio. In questo caso, infatti, dopo aver accantonato il figlio maschio maggiore, si ottengono le seguenti 4 situazioni: M-M, M-F, F-M, F-F.

Risoluzione del problema 6.

Una risposta, data intuitivamente e senza riflettere, è $1/2$. Ed è una risposta errata.

Ci sono due modi per trovare quella giusta: uno è abbastanza elementare, l'altro è un po' più sofisticato.

Occupiamoci del primo procedimento.

La pallina estratta, che è bianca, può essere quella che è sicuramente bianca, nel qual caso la pallina rimasta nell'urna può essere bianca o nera. Quindi ci sono due possibilità, compresa la prima estrazione: B-B, B-N.

La pallina estratta può essere invece quella che in partenza non si sa se è bianca o nera. Nel qual caso la pallina rimasta nell'urna è certamente bianca. Quindi una sola possibilità, compresa l'estrazione iniziale: B-B.

In conclusione, considerando anche la prima estrazione, cioè quella di pallina bianca, ci sono tre possibilità: B-B, B-N, B-B. In una sola di esse la pallina rimasta nell'urna è nera: la relativa probabilità è pertanto $1/3$.

Descriviamo adesso la seconda modalità, dicendo subito che è basata sul teorema di Bayes.

Conviene immaginare che ci siano due urne: una, urna U, contenente due palline bianche; l'altra, urna V, contenente una pallina bianca ed una nera. Ora, scelta a caso un'urna ed estratta da essa una pallina a caso, dopo aver costatato che è bianca, si tratta di stabilire qual è la probabilità che essa provenga dall'urna V, che è l'urna che contiene la pallina nera. Un grafico opportuno (figura 2) chiarisce la situazione.

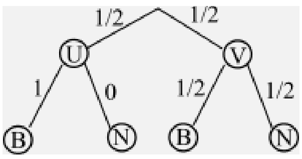

figura 2

Ebbene, ricorrendo al teorema di Bayes, questa probabilità, vale a dire la probabilità che la pallina bianca estratta provenga dall'urna V, è:

$$\mathrm{p(V|B)} = \frac{\mathrm{p(B|V) \cdot p(V)}}{\mathrm{p(B)}}.$$

Siccome:

$$\mathrm{p(B|V)} = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{p(V)} = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{p(B)} = \mathrm{p(B|U) \cdot p(U) + p(B|V) \cdot p(V)} = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

risulta:

$$\mathrm{p(V|B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Il teorema utilizzato, detto anche "teorema della probabilità delle cause", prende il nome dal matematico che lo scoprì, il reverendo inglese **Thomas Bayes** (1702-1761).

La formula relativa fu pubblicata, per la prima volta, nel 1763, dopo la morte del suo autore, ma divenne celebre soltanto dopo che il francese **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827) la rispolverò o forse, come sostengono alcuni storici, la ritrovò da solo senza conoscere il lavoro di Bayes. Egli la incluse, comunque, sia nel celebre trattato ***Teoria analitica delle probabilità*** (1812) sia nel ***Saggio filosofico sulle probabilità*** (1814).

A dirla tutta, alcuni storici della matematica, piuttosto critici nei confronti di Laplace, asseriscono che questi, pur grande scienziato, avrebbe utilizzato spesso risultati scoperti da altri studiosi senza mai citarli, dando così ad intendere che fossero farina del proprio sacco. Lo stesso sarebbe accaduto con la formula di Bayes, che Laplace utilizza per la prima volta in una memoria del 1774 intitolata ***Sulla probabilità delle cause dei*** *successi*, senza citare Bayes. Che invece citerà per la prima volta nella ***Teoria analitica delle probabilità***. Colui che per primo denominò ***teorema di Bayes*** il "teorema della probabilità delle cause" fu il matematico e logico britannico **Augustus De Morgan** (1806-1871), il quale volle in questo modo rimarcare che la priorità della scoperta andava attribuita al suo compatriota Thomas Bayes.

Considerazioni supplementari.

I problemi 1 e 3 si risolvono in un attimo se si è a conoscenza di un fatto fondamentale e precisamente che, se un corpo qualsiasi percorre un certo cammino, suddiviso in n tappe di uguale lunghezza, con velocità medie $v_1, v_2, \dots, v_n$, allora la velocità media v sull'intero percorso è la media armonica delle n velocità, vale a dire:

$$v = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}(1/v_k)}.$$

Cosa, questa, che si dimostra facilmente generalizzando il ragionamento già esposto in sede di risoluzione dei problemi 1 e 3.

Cosicché, in relazione al problema 1, si ha:

$$80 = \frac{2}{\frac{1}{40}+\frac{1}{v}} \quad \text{da cui segue:} \quad \frac{1}{v} = 0\,.$$

Mentre, in relazione al problema 3, si ha immediatamente:

$$v = \frac{3}{\frac{1}{130}+\frac{1}{125}+\frac{1}{120}}.$$

Anche il problema 4 si risolve rapidamente. Purché si abbia conoscenza del fatto che la pendenza media p di un percorso suddiviso in n tratti di lunghezze $L_1, L_2, \dots, L_n$ e pendenze rispettive $p_1, p_2, \dots, p_n$, è data dalla media aritmetica ponderata delle pendenze degli n tratti, assumendo come pesi le rispettive lunghezze. Vale a dire:

$$p = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k L_k}{\sum_{k=1}^{n} L_k}.$$

Questa formula si dimostra facilmente generalizzando il procedimento seguito per risolvere il problema 4.

Da essa si desume inoltre che la pendenza media sull'intero percorso è uguale alla media aritmetica delle n pendenze nel caso in cui le lunghezze degli n tratti sono uguali.

Una chiosa per finire.

Non vorrei aver lasciato l'impressione che l'intuizione sia qualcosa di negativo, da eliminare nella ricerca matematica. Proprio no. Basti pensare che molte grandi scoperte sono state fatte proprio in base ad intuizioni. Solo che l'intuizione da sola non basta a garantirne la veridicità. Per questo occorre qualcosa di più e di diverso. E questo qualcosa è il ragionamento deduttivo. E comunque, anche quando sono sbagliate, le intuizioni forniscono pur sempre utili indicazioni. Come sosteneva **Giovanni Vailati** (1): *Ogni errore ci indica uno scoglio da evitare mentre non ogni scoperta ci indica una via da seguire*.

Riferimenti bibliografici.

[1] Lewis Carroll, *I problemi del cuscino*, collana "Sfide matematiche", RBA Italia, 2008.
[2] Nicholas Falletta, *Il libro dei paradossi*, Milano, Longanesi & C., 1989.
[3] Martin Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, Milano, BUR Supersaggi, 1997.
[4] Yahov Perelman, *Matematica ricreativa*, collana "Sfide matematiche", RBA Italia, 2008.

---

[1] Giovanni Vailati (1863-1909), discepolo di Giuseppe Peano (1858-1932), filosofo, storico, matematico e professore di matematica nelle scuole superiori, pubblicò su varie riviste circa 200 articoli di vario genere. I quali, dopo la sua morte, e per iniziativa di alcuni suoi amici ed estimatori, furono raccolti in un unico volume dal titolo "*Scritti di G. Vailati*". Ho ripreso il pensiero su riportato da un'edizione digitale dal titolo *Scritti filosofici*. Esso compare nella 2ª pagina del 1° scritto "*Sull'importanza delle ricerche relative alla storia delle scienze*".