

Prova di verifica e di potenziamento dell'apprendimento. Primo o secondo biennio.

Tema

Ars Combinatoria: numeri, parole, suoni, colori e idee. Calculemus!

PARTE PRIMA

1. Quanti numeri di tre cifre si possono formare con le sei cifre 2, 3, 5, 6, 7 e 9 (tenendo conto che non sono consentite le ripetizioni)?
2. In un piano ci sono dieci punti A, B, C, ... mai tre su una stessa retta. Quanti sono i triangoli determinati dai punti? Quanti di questi triangoli hanno vertice in A?
3. È dato un insieme di 4 elementi. Quanti sono i suoi sottoinsiemi?
4. Che combinazione! È un'espressione comune: per dire che cosa? È anche il titolo di una canzone di Edoardo Bennato!

PARTE SECONDA

Lettura 1. [Da: Galileo Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano*, Einaudi 1970]

«Io son molte volte andato meco medesimo considerando [...] quanto grande sia l'acutezza dell'ingegno umano [...] per tante e tanto maravigliose invenzioni trovate dagli uomini, sí nelle arti come nelle lettere [...] Ma sopra tutte le invenzioni stupende, qual eminenza di mente fu quella di colui che s'immaginò di trovar modo di comunicare i suoi più reconditi pensieri a qualsivoglia altra persona, benché distante per lunghissimo intervallo di luogo e di tempo? parlare con quelli che son nell'Indie, parlare a quelli che non sono ancora nati né saranno se non di qua a mille e dieci mila anni? e con qual facilità? con i vari accozzamenti di venti caratteruzzi sopra una carta. Sia questo il sigillo di tutte le ammirande invenzioni umane, e la chiusa de' nostri ragionamenti di questo giorno».

Lettura 2. [Da: Goffredo W. Leibniz, *Apocatastasi panton*, 1715]

«Si può stabilire il numero di tutti i libri possibili che non eccedono una determinata grandezza, composti da vocaboli significanti o non significanti, che comprende pertanto anche tutti i libri dotati di senso. Chiamo libro di grandezza determinata quello che non ecceda un certo numero di lettere. Per esempio, si consideri un libro [...] composto di 10.000 pagine, ogni pagina di 100 righe, ogni riga di 100 caratteri: sarà un libro di 100.000.000 di caratteri. Si diranno allora di grandezza determinata quelli che non eccedono tale misura. Ora, il numero dei libri che non eccedono tale grandezza, ossia che si possono formare con cento milioni di caratteri dell'alfabeto al massimo, è finito. Non soltanto questo numero è finito, ma si può anche trovare, mediante il calcolo delle combinazioni, quanti libri possibili che non eccedono il numero di lettere proposto, grandi o piccoli, differenti gli uni dagli altri anche di pochissimo [...] Poniamo inoltre che la storia pubblica annuale del mondo si possa descrivere in un libro di tale grandezza, che contenga cento milioni di lettere o sia anche più breve. Ne consegue che anche il numero delle possibili storie pubbliche del mondo, differenti tra loro, è definito; ciascuna di esse rappresenterebbe infatti un nuovo libro. Se ora poniamo che il genere umano duri abbastanza a lungo nello stato in cui si trova presentemente, tanto da poter fornire materia alle storie pubbliche, è necessario che a un certo punto le storie pubbliche si ripetano esattamente».

Lettura 3. [Da Eric J. Aiton, *Leibniz*, Il Saggiatore, 1991]

«Nel *De Arte combinatoria*, Leibniz sviluppò la splendida idea che gli era venuta in mente già ai tempi in cui frequentava la scuola, di un alfabeto dei pensieri umani. Egli pensava che tutti i concetti risultassero semplicemente da combinazioni di un numero relativamente piccolo di concetti semplici o fondamentali, allo stesso modo in cui parole e frasi risultavano dalle molteplici combinazioni delle lettere dell'alfabeto. Combinando i concetti semplici, si potevano scoprire tutte le verità che le loro relazioni esprimevano».

Domanda 1. Quali sono le questioni di combinatoria descritte nelle tre letture proposte?

Domanda 2. Se A è il numero di tutti i caratteri – lettere, segni di interpunzione e spazio bianco – qual è il numero dei libri della biblioteca di Leibniz?

Domanda 3. L'espressione di Leibniz “la storia pubblica annuale del mondo” quale significato può avere oggi?

PARTE TERZA

1. Con le cifre da 1 a 6 è possibile formare $6! = 720$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 6 cifre. Ad esempio, i numeri 123456 e 365412 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 720 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 716-esima posizione?
2. Il simbolo $\binom{n}{k}$ è utilizzato per indicare il numero di modi in cui da un insieme di n oggetti se ne possono scegliere k . Il simbolo è detto *coefficiente binomiale* per il legame che ha con lo sviluppo della potenza n -esima del binomio nonché con il triangolo di Tartaglia? Puoi chiarire la natura di tale legame?
3. Prova che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ e, facendo a meno dei simboli, esprimi il risultato a parole.
4. CD331EA è la targa assegnata ad un'automobile attualmente ancora in circolazione. Ci sarà un'ultima targa assegnabile ad un'automobile? Quale?
5. Se una canzone è una combinazione di parole e suoni, ci sarà un'ultima canzone? E se un colore è combinazione di altri colori sarà possibile compilare una lista di tutti i colori possibili?

ALTRE LETTURE:

Letture S1. La macchina per scrivere i libri [da Jonathan Swift, I viaggi di Gulliver]

«Disse che la via per apprendere le arti e le scienze è dura e faticosa; ma con la sua invenzione anche i più ignoranti avrebbero potuto scrivere libri di filosofia, poesia, politica, legge, matematica, teologia. Ingegno e applicazione non servivano a nulla; sarebbe stata sufficiente una modica spesa e uno sforzo muscolare irrisorio.

[Il telaio] era un quadrato di sei metri, posto nel mezzo della stanza, dalla superficie composta di molti pezzi di legno, simili a dadi comuni di diverse dimensioni e tenuti insieme da fili sottili. Sopra ogni faccia dei dadi era stato incollato un pezzo di carta e tutti insieme comprendevano le parole della loro lingua in tutte le forme, declinazioni e coniugazioni, sebbene senza una distribuzione sistematica. Il docente richiamò la mia attenzione perchè stava per azionare la macchina. Al suo comando ogni allievo impugnò la rispettiva manovella di ferro che sporgeva dal telaio (erano in tutto quaranta), poi dette un giro improvviso cambiando completamente la disposizione delle parole. Allora fece leggere

pian pianino a trentasei ragazzi le diverse righe come apparivano sulla superficie del telaio, e quando pescava tre o quattro parole che si potevano unire per formare una frase, la dettava agli altri quattro, che fungevano da scrivani. [...] Gli studenti lavoravano al telaio per sei ore al giorno e il docente volle mostrarmi parecchi volumi in folio nei quali aveva raccolto frasi sconnesse che intendeva ricucire, per fornire al mondo la summa completa di tutte le arti e le scienze. Indubbiamente riconobbe che il metodo doveva essere ancora perfezionato e reso più rapido».

Lettura S2. Il numero di libri possibili [da: Lewis Carroll, Sylvie and Bruno, Garzanti, 2016]

«[...]– Tuttavia, – disse Lady Muriel, – non ci sono più nuove melodie, al giorno d’oggi. Ciò che la gente chiama “l’ultima nuova canzone”, a me ricorda sempre qualcosa che cantavo da bambina.– Verrà il giorno, se il mondo durerà abbastanza a lungo, – disse Arthur, – in cui tutte le melodie saranno state composte, ogni possibile gioco di parole sarà stato perpetrato [...] e, quel che è peggio, ogni libro sarà stato scritto! Perché il numero delle parole è finito.– Il che per gli scrittori farà poca differenza. – suggerii. – Invece di chiedersi “Che libro scriverò?” si chiederanno “Quale libro scriverò?”»

Lettura S3. Le scimmie scrittrici [da Emile Borel, *Mecanique Statistique et Irreversibilité*, 1913]:

«Supponiamo di aver addestrato un milione di scimmie a battere casualmente i tasti di una macchina da scrivere e che, sotto la sorveglianza di custodi analfabeti, queste scimmie lavorino alacremente dieci ore al giorno su un milione di macchine da scrivere di vario tipo. I custodi analfabeti raccoglierebbero i fogli anneriti di lettere, rilegandoli in volumi. Dopo un anno, tra quei volumi si troveranno le copie esatte dei libri di ogni argomento e ogni lingua, che sono conservati nelle più ricche biblioteche del mondo. Tale è la probabilità che si produca, in un breve istante, in qualche luogo, un evento notevole che la meccanica statistica considera come l’evento più probabile».

Domanda 1: “nel giro di un anno”? Una previsione sensata?